ЛЕКЦИЯ 1.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Соболевские пространства появились в работах С.Л. Соболева в 30-е годы. Его монография [1] вышла в 1950 г., потом была переиздана. Эти пространства оказались чрезвычайно удобными в различных отделах анализа, в особенности в уравнениях математической физики. Сейчас это отдельный раздел функционального анализа. По существу у Соболева уже было отчетливое понятие обобщенной функции.

Систематическую разработку теории обобщенных функций предпринял Лоран Шварц в 40-е годы, проанализировав множество достижений классиков анализа. Его монография [2] вышла в 1950 г., у нас распространялась ротапринтная копия. В Москве "бум" этой теории начался с работ И.М. Гельфанда и Г.Е. Шилова. Их первая книга [3] недавно переиздана.

Псевдодифференциальные операторы появились в 60-е годы, они оказались необходимыми при решении проблемы вычисления индекса общего эллиптического оператора, поставленной И.М. Гельфандом в 1960 г., а затем нашли применения ко многим другим задачам. Это синтез теории интегральных и дифференциальных операторов, содержащий исчисление символов.

По всем этим направлениям написано необозримое количество работ и много книг. "Бум" прошел, но остался новый язык и аппарат, позволившие продвинуться во многих задачах анализа, прежде всего в уравнениях в частных производных, см., например, [4]. Корифеи современной геометрии, живущие на Западе (такие, как Атья, Зингер, Гилмен и многие другие), прекрасно владеют этим аппаратом. В учебники он только начинает проникать, см., например, [5]. Но это пока не относится к псевдодифференциальным операторам.

1. С.Л. Соболев. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд. Ленинградского университета, Л., 1950.

2. L Schwartz. Théorie des distributons. Hermann, Paris, 1950.

3. И.М. Гельфанд и Г.Е. Шилов. Обобщенные функции и действия над ними. Гос. изд. физ.-мат. лит., М., 1959.

4. Ю.В. Егоров и М.А. Шубин. Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Элементы современной теории. Итоги науки и техники, Совр. проблемы математики, Фунд. направления, т. 31. ВИНИТИ, М., 1988. С. 6–125.

5. М.А. Шубин. Лекции об уравнениях математической физики. МЦНМО, М., 2001.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

1. Определение обобщенной функции (распределения). Рассмотрим пространство $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ финитных бесконечно гладких функций (комплекснозначных). Это *основные функции* (потом введем другие пространства основных функций). Это пространство линейно. В нем можно ввести топологию, но пока, следуя И.М. Гельфанду и Г.Е. Шилову, ограничимся определением сходимости: $\varphi_j \to \varphi$ в этом пространстве, если существует такое $A > 0$, что все эти функции равны нулю при $|x| > A$ и $\partial^\alpha \varphi_j(x) \to \partial^\alpha \varphi(x)$ равномерно при любом α. Здесь и дальше

$$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}, \qquad \partial_j = \partial/\partial x_j.$$

Задача 1. Проверить полноту пространства $\mathcal{D}$ относительно этой сходимости (проверить, что фундаментальная последовательность имеет предел).

Основные функции обычно будем обозначать буквами φ, ψ.

Обобщенная функция f (над $\mathcal{D}$) – это линейный непрерывный функционал $\langle f, \varphi\rangle$ над $\mathcal{D}$.

Примеры. 1. *Дельта-функция* $\delta(x - x_0)$:

$$\langle \delta(x - x_0), \varphi(x)\rangle = \varphi(x_0). \tag{1}$$

Это определение придает точный смысл известному физическому определению дельта-функции: это такая "функция", равная 0 вне x_0 и бесконечности в x_0, что всегда $\int \delta(x - x_0) f(x)\, dx = f(x_0)$.

2. *Функционал типа функции*, или *регулярная обобщенная функция.* Пусть $f(x) \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Полагаем

$$\langle f, \varphi\rangle = \int f(x)\varphi(x)\, dx \tag{2}$$

(интеграл по $\mathbb{R}^n$).

Совокупность всех обобщенных функций над $\mathcal{D}$ обозначается через $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Это линейное пространство с определением линейных операций

$$\langle \alpha f + \beta g, \varphi\rangle = \alpha\langle f, \varphi\rangle + \beta\langle g, \varphi\rangle. \tag{3}$$

2. Дифференцирование обобщенной функции. Сначала пусть $f(x) \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\int \partial_j f(x)\varphi(x)\, dx = -\int f(x)\partial_j \varphi(x)\, dx$$

(проинтегрировали по частям). Принимая эту формулу за образец, полагаем для любой обобщенной функции f

$$\langle \partial_j f, \varphi\rangle = -\langle f, \partial_j \varphi\rangle. \tag{4}$$

Очевидно, что это обобщенная функция.

Мы видим, что обобщенные функции дифференцируемы и, значит, бесконечно дифференцируемы:

$$\langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle \tag{5}$$

при любом α; здесь и дальше $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

Примеры. 1. Пусть для простоты $n = 2$. В анализе есть теорема:

$$\partial_1 \partial_2 f(x_1, x_2) = \partial_2 \partial_1 f(x_1, x_2),$$

если эти частные производные непрерывны в рассматриваемой точке. *Для обобщенных функций всегда*

$$\partial_1 \partial_2 f = \partial_2 \partial_1 f. \tag{6}$$

Действительно,

$$\langle \partial_1 \partial_2 f, \varphi \rangle = \langle f, \partial_2 \partial_1 \varphi \rangle = \langle f, \partial_1 \partial_2 \varphi \rangle = \langle \partial_2 \partial_1 f, \varphi \rangle.$$

Мы видим, что для обобщенных функций f порядок дифференцирования в ∂^α безразличен.

2. Пусть $f(x)$ – функция на прямой, гладкая вне точки x_0, имеющая в ней разные односторонние пределы $f(x_0 \pm 0)$. Тогда ее производная в смысле обобщенных функций – функционал типа функции $f'(x)$ плюс $h\delta(x - x_0)$, где h – скачок $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$. Это проверяется интегрированием по частям:

$$-\int_{-\infty}^{x_0} f(x)\varphi'(x)\,dx - \int_{x_0}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx =$$
$$\int_{-\infty}^{x_0} f'(x)\varphi(x)\,dx + \int_{x_0}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx + h\varphi(x_0).$$

Этот результат легко обобщается на случай кусочно-гладкой функции с несколькими точками скачков.

В частности, производная в смысле обобщенных функций от *функции Хевисайда* $\theta(x)$, равной 0 при $x < 0$ и 1 при $x > 0$, равна $\delta(x)$.

3. Производные дельта-функции

$$\langle \partial^\alpha \delta(x - x_0), \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(0).$$

3. Умножение на бесконечно гладкую функцию. Пусть $f \in D'$ и $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Если f – регулярная обобщенная функция, то и af – регулярная обобщенная функция и имеет место формула

$$\langle af, \varphi \rangle = \langle f, a\varphi \rangle.$$

В общем случае принимаем эту формулу за определение произведения af. Очевидно, что получается обобщенная функция.

Мы видим, что в D' действуют линейные дифференциальные операторы с бесконечно гладкими коэффициентами

$$a(x,D)=\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\partial^\alpha, \qquad a_\alpha\in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Задача 2. Проверить формулу Лейбница

$$(af)'=a'f+af' \qquad (n=1,\ \ a\in C^\infty,\ \ f\in\mathcal{D}').$$

4. Регуляризация функций с особенностями. Рассмотрим этот вопрос пока на примере.

Рассмотрим обычную функцию $1/x$, $n=1$. Как сопоставить ей обобщенную функцию? Интеграл

$$\int \frac{\varphi(x)}{x}\,dx,$$

вообще говоря, расходится.

1-й способ. Используем главное значение интеграла (p.v. – principal value): полагаем

$$\langle v.p.\,\frac{1}{x},\varphi\rangle = v.p.\int\frac{\varphi(x)}{x}\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\ge\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx.$$

Здесь вырезается симметричная окрестность особой точки. Этот предел существует и вычисляется следующим образом. Пусть $\varphi(x)=0$ при $|x|\ge A$. Тогда он равен

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{\varepsilon<|x|<A}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx+\varphi(0)\int_{\varepsilon<|x|<A}\frac{1}{x}\,dx\right]=\int_{|x|<A}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx.$$

2-й способ. Рассмотрим предел

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}\,dx.$$

Пусть снова $\varphi(x)=0$ при $|x|\ge A$. Тогда этот предел равен

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|<A}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x+i\varepsilon}\,dx+\varphi(0)\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|<A}\frac{dx}{x+i\varepsilon}.$$

Последний интеграл вычисляется как

$$\int_{-A+i\varepsilon}^{A+i\varepsilon}\frac{1}{z}\,dz=\log z\Big|_{-A+i\varepsilon}^{A+i\varepsilon}=i\arg z\Big|_{-A+i\varepsilon}^{A+i\varepsilon}$$

по формуле Ньютона–Лейбница. Здесь

$$\log z=\log|z|+i\arg z,\quad |\arg z|\le\pi.$$

В пределе получаем

$$\int_{-A}^{A} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx - i\pi\varphi(0).$$

Эта обобщенная функция обозначается через $\frac{1}{x+i0}$. Таким образом,

$$\frac{1}{x+i0} = v.p.\frac{1}{x} - i\pi\delta(x). \tag{7}$$

Задача 3. Определить и вычислить обобщенную функцию $\frac{1}{x-i0}$.

5. Предельный переход. *Сходимость в* D' определяется как слабая сходимость:

$$f_j \to f, \text{ если } \langle f_j, \varphi\rangle \to \langle f, \varphi\rangle$$

для любой основной функции φ. Вместо индекса j тут может быть, скажем, индекс $\varepsilon \to 0$.

Примеры. 1. $v.p.\frac{1}{x}$ – предел функционалов типа функций f_ε, равных 0 при $|x|<\varepsilon$ и $1/x$ при $|x|>\varepsilon$.

2.

$$\frac{1}{x+i0} = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{x+i\varepsilon}$$

(под знаком предела – регулярные обобщенные функции).

Замечание. Если $f_j \to f$, то $\partial^\alpha f_j \to \partial^\alpha f$. (А в обычном анализе перестановка дифференцирования с предельным переходом требует дополнительных предположений.) Точно так же если $f_j \to f$ и a – бесконечно гладкая функция, то $af_j \to af$. Это сразу видно из наших определений.

6. Свертка обычных функций. Это одна из важнейших операций в анализе; она обозначается звездочкой и определяется равенством

$$(\varphi * \psi)(x) = \int \varphi(x-y)\psi(y)\,dy. \tag{8}$$

Если $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$, то легко проверяется, что свертка этих функций принадлежит $\mathcal{D}$. Действительно, она финитна, а производные любого порядка вычисляются дифференцированием под знаком интеграла:

$$\partial^\alpha(\varphi * \psi)(x) = \int \partial^\alpha\varphi(x-y)\psi(y)\,dy,$$

т.е.

$$\partial^\alpha(\varphi * \psi) = (\partial^\alpha\varphi) * \psi. \tag{9}$$

Ясно, что все производные непрерывны.

Но можно рассматривать свертку и более общих функций. Например, если $\varphi \in \mathcal{D}$, а ψ – непрерывная функция, то свертка существует и принадлежит $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, а если ψ – финитная непрерывная функция, то свертка принадлежит $\mathcal{D}$. Проверьте это самостоятельно.

ЛЕКЦИЯ 2.

Итак, мы рассматриваем свертку

$$(\varphi * \psi)(x) = \int \varphi(x-y)\psi(y)\,dy. \tag{1}$$

Она *коммутативна*:

$$\varphi * \psi = \psi * \varphi. \tag{2}$$

Это легко проверяется при помощи замены переменных в интеграле (1): $x-y = \widetilde{x}$.

Следствие: если обе функции бесконечно гладкие и для простоты одна финитна, то

$$(\partial^\alpha \varphi) * \psi = \varphi * (\partial^\alpha \psi). \tag{3}$$

Свертка, кроме того, *ассоциативна*:

$$(\varphi * \psi) * \chi = \varphi * (\psi * \chi) \tag{4}$$

(если для простоты хотя бы две из трех функций финитны), так что можно писать $\varphi * \psi * \chi$. Немного громоздкую проверку пока пропустим.

7. Дельтаобразные последовательности. Последовательность $\{f_n\}$ обычных функций называется *дельтаобразной*, если соответствующие регулярные обобщенные функции стремятся к $\delta(x)$ при $n \to \infty$. Можно, конечно, говорить и о дельтаобразном семействе $\{f_\varepsilon\}$, $\varepsilon \to 0$. Они часто полезны в анализе. Обсудим один из способов построения и построим дельтаобразное семейство основных функций.

Возьмем функцию $\varphi_1 \in \mathcal{D}$ со следующими свойствами:

$$\varphi_1(x) \geq 0, \quad \varphi_1(x) = 0 \ \text{ при } \ |x| \geq 1, \quad \int \varphi_1(x)\,dx = 1. \tag{5}$$

Положим

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad 0 < \varepsilon < 1. \tag{6}$$

Очевидно, что $\int \varphi_\varepsilon\,dx = 1$ и $\varphi_\varepsilon(x) = 0$ при $|x| \geq \varepsilon$. Поэтому

$$\langle \varphi_\varepsilon, \psi \rangle = \int_{|x|\leq\varepsilon} \varphi_\varepsilon(x)[\psi(x) - \psi(0)]\,dx + \psi(0)$$

стремится к $\psi(0)$ при $\varepsilon \to 0$. Значит, (6) – дельтаобразное семейство.

8. Носители обычных и обобщенных функций. *Носителем* $\operatorname{supp} f$ непрерывной функции $f(x)$ называется замыкание множества точек, в которых она отлична от нуля. Функция $f(x)$ называется финитной, если ее носитель компактен. Линеал, состоящий из финитных непрерывных функций, обозначается через $C_0^0(\mathbb{R}^n)$.

Пусть f – обобщенная функция из $D'(\mathbb{R}^n)$ и O – открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Говорят, что $f = 0$ в O, если $\langle f, \varphi \rangle = 0$ для всех основных функций с носителями в O. *Носителем* $\operatorname{supp} f$ обобщенной функции f называется наименьшее замкнутое множество, вне которого она равна нулю. Если f – функционал типа непрерывной функции, то это определение согласуется с предыдущим. Обобщенная функция с компактным носителем называется *финитной*.

Пример: носитель дельта-функции $\delta(x-x_0)$ и любой ее производной – точка x_0. Говорят, что такие обобщенные функции *сосредоточены в точке* x_0.

Сформулируем две теоремы (они будут доказаны позднее).

Теорема 1. *Любая обобщенная функция, сосредоточенная в одной точке* x_0*, является конечной линейной комбинацией дельта-функции* $\delta(x - x_0)$ *и ее производных*:

$$f = \sum_{|\alpha| \le m} c_\alpha \partial^\alpha \delta(x - x_0). \tag{7}$$

Теорема 2. *Любая финитная обобщенная функция является конечной суммой производных некоторого порядка в смысле обобщенных функций от финитных непрерывных функций*:

$$f = \sum_{|\alpha| \le l} \partial^\alpha f_\alpha(x), \quad f_\alpha(x) \in C_0^0(\mathbb{R}^n). \tag{8}$$

Линеал, состоящий из финитных обобщенных функций, обозначается через $\mathcal{E}' = \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Он *плотен в* $\mathcal{D}'$, так как если φ – основная функция, равная 1 в окрестности начала, то любая обобщенная функция f есть предел произведений $\varphi(x/m)f$ при $m \to \infty$.

9. Свертка обобщенных функций. Мы ограничимся определением свертки двух обобщенных функций, из которых хотя бы одна финитна.

Пусть сначала $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывные функции, $g(x)$ финитна. Тогда

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \iint f(x - y) g(y)\, dy\, \varphi(x)\, dx.$$

Заменим $x - y$ на $\widetilde{x}$ и затем $\widetilde{x}$ на x. Меняя порядок интегрирования (по соответствующей теореме из анализа или по теореме Фубини), получаем, что правая часть равна

$$\int f(x) \int g(y) \varphi(x + y)\, dy\, dx,$$

т.е.

$$\langle (f * g)(x), \varphi(x) \rangle = \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x + y) \rangle \rangle. \tag{9}$$

Справа во внутренних угловых скобках $g(y)$ действует на $\varphi(x + y)$ как на функцию от y; x играет роль параметра. Получается основная функция от x (проверьте), на нее и действует $f(x)$ во внешних угловых скобках.

Пусть теперь $f \in \mathcal{D}'$, $g \in \mathcal{E}'$. Принимая последнюю формулу за образец, полагаем

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \langle f, \langle g, \varphi(x + y) \rangle_y \rangle_x. \tag{10}$$

Индексы справа указывают, по каким переменным действуют обобщенные функции g и f. Внутренние угловые скобки определяют основную функцию от x. Это видно из теоремы 2: если

$$g = \sum_{|\beta|\le m} \partial^\beta g_\beta(x), \qquad g_\beta(x) \in C_0^0(\mathbb{R}^n), \tag{11}$$

то

$$\langle g, \varphi(x+y)\rangle_y = \sum_{|\beta|\le m} (-1)^{|\beta|} \int g_\beta(y) \partial^\beta \varphi(x+y)\, dy.$$

Конечно, если и f финитна, то в (10) можно поменять f и g ролями. Получается одно и то же (с использованием (8) и (11)):

$$\langle f * g, \varphi\rangle = \sum_{\alpha,\beta} (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \iint f(x) g(y) \partial^{\alpha+\beta} \varphi(x+y)\, dx\, dy. \tag{12}$$

Пример. $f * \delta(x) = f$ для любой обобщенной функции f.

Действительно, $\langle \delta(y), \varphi(x+y)\rangle_y = \varphi(x)$.

Замечание. Пусть K – компакт в $\mathbb{R}^n$ и мы хотим рассматривать свертку $f * g$ только на основных функциях $\varphi(x)$ с носителями в K. Тогда носители основных функций $\langle g, \varphi(x+y)\rangle_y$ тоже лежат в некотором компакте K_1. Это позволяет заменить f на ψf, где ψ – основная функция, равная 1 в окрестности компакта K_1. Поэтому часто удобно считать, что в свертке $f * g$ финитны и f, и g.

Отметим следующие свойства свертки, для простоты пока предполагая, что рассматриваемые обобщенные функции финитны.

1. *Коммутативность*: $f * g = g * f$. Она уже проверена.
2. *Формула для производных*: $\partial^\gamma (f * g) = (\partial^\gamma f) * g = f * (\partial^\gamma g)$.
3. *Ассоциативность* $(f * g) * h = f * (g * h)$; можно писать $f * g * h$.
4. *Непрерывность*: если $f_n \to f$, то $f_n * g \to f * g$ (ограничимся эти утверждением).
5. Если $f \in \mathcal{E}'$ и $g \in \mathcal{D}$, то $f * g \in \mathcal{D}$.

Наметим доказательство. Утверждение 2 проверяется при помощи формулы (12). Утверждение 3 проверяется при помощи формулы типа (12) для сверток $(f * g) * h$ и $f * (g * h)$. Например, если все три обобщенные функции финитны и непрерывны, то

$$\langle (f * g) * h, \varphi\rangle = \iiint f(x) g(y) h(z) \varphi(x+y+z)\, dx\, dy\, dz = \langle f * (g * h), \varphi\rangle.$$

Этим мы проверили и (4) для финитных непрерывных функций. Утверждение 4 следует из определения (10). Утверждение 5 проверьте самостоятельно, используя утверждение 2 и формулу (8).

Теорема. *Пространство $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{D}'$.*

Доказательство. Так как $\mathcal{E}'$ плотно в $\mathcal{D}'$, то достаточно проверить, что $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{E}'$. Если $f \in \mathcal{E}'$, то возьмем дельтаобразную последовательность $\varphi_j(x)$ основных функций (см. п. 7); имеем (см. свойства свертки 4 и 5)

$$f * \varphi_j \to f * \delta(x) = f,$$

и здесь $f * \varphi_j \in \mathcal{D}$. □

10. Решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений в обобщенных функциях. Рассмотрим сначала уравнение

$$Lu(x) =: u^{(m)} + a_1(x)u^{(m-1)} + \cdots + a_m(x)u = f(x) \tag{13}$$

с бесконечно гладкими коэффициентами и бесконечно гладкой правой частью.

Теорема. *Любое решение уравнения* (13) *в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ является обычным бесконечно гладким решением.*

Доказательство. Уравнение (13) сначала сводится к однородному уравнению (вычитанием частного решения, которое существует на всей оси и является бесконечно гладким). Затем однородное уравнение известным образом сводится к системе 1-го порядка

$$U'(x) = A(x)U(x) \tag{14}$$

с бесконечно гладкой матрицей $A(x)$. Достаточно проверить, что ее обобщенные решения являются обычными бесконечно гладкими решениями. Пусть $\Phi(x)$ – фундаментальная матрица этой системы. Она существует и является невырожденной и бесконечно гладкой на всей оси. Положим $U = \Phi(x)V$. Для V получается уравнение $V' = 0$. Осталось показать, что любое решение скалярного уравнения $v' = 0$ в $\mathcal{D}'$ – постоянная.

Пусть φ_0 – фиксированная функция из $\mathcal{D}$ с $\int \varphi_0\,dx = 1$. Тогда любую функцию φ из $\mathcal{D}$ можно представить в виде

$$\varphi = \psi + h\varphi_0, \quad \text{где} \quad h = \int \varphi\,dx \quad \text{и} \quad \int \psi\,dx = 0.$$

Функция ψ определяется написанным равенством. Это производная от функции

$$\int_{-\infty}^{x} \psi(t)\,dt,$$

принадлежащей $\mathcal{D}$. Поэтому

$$\langle v, \psi\rangle = 0 \quad \text{и} \quad \langle v, \varphi\rangle = hC,$$

где $C = \langle v, \varphi_0\rangle$. С другой стороны,

$$\langle C, \varphi\rangle = C\int \psi\,dx + hC\int \varphi_0\,dx = hC.$$

Мы видим, что $v = C$. □

ЛЕКЦИЯ 3.

Определим более общие пространства основных и обобщенных функций. Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^n$. Положим

$$\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega), \tag{1}$$

это пространство бесконечно гладких функций в Ω с компактными носителями (лежащими внутри Ω). Как и в случае $\Omega = \mathbb{R}^n$, это линейное пространство, и сходимость в нем определяется так: $\varphi_j \to \varphi$, если носители всех этих функций лежат в фиксированном компакте $K \subset \Omega$ и на нем $\partial^\alpha \varphi_j(x) \to \partial^\alpha \varphi(x)$ равномерно при любом α. *Пространство* $\mathcal{D}'(\Omega)$ определим как состоящее из всех линейных непрерывных функционалов над $\mathcal{D}(\Omega)$. В этом пространстве, как и в случае $\Omega = \mathbb{R}^n$, есть дифференцирование, умножение на бесконечно гладкие функции (определенные в Ω) и сходимость (слабая).

В частности, если $n = 1$, то можно взять $\Omega = (a, b)$. Теорема о том, что все решения обыкновенного дифференциального уравнения с бесконечно гладкими коэффициентами и правой частью являются обычными бесконечно гладкими решениями, распространяется на случай интервала (a, b) вместо оси, доказательство сохраняется.

В случае дифференциального оператора с переменными коэффициентами будем писать $L = L(x, \partial)$, в случае оператора с постоянными коэффициентами $L = L(\partial)$. Здесь $\partial = d/dx$.

Теперь рассмотрим оператор с постоянными коэффициентами:

$$Lu(x) = L(\partial)u(x) := u^{(m)} + a_1 u^{(m-1)} + \cdots + a_m u. \tag{2}$$

Определим *фундаментальное решение уравнения* $Lu = 0$ как такую функцию $\mathcal{E}(x)$, что $L\mathcal{E}(x) = \delta(x)$ в смысле обобщенных функций на оси. (Тут традиционна не вполне правильная терминология; Г.Е. Шилов пытался говорить "фундаментальная функция оператора L". Но классики говорили "фундаментальное решение уравнения $Lu = 0$" еще до появления обобщенных функций. В каком смысле, увидим.)

Сейчас мы укажем способ построения фундаментального решения и покажем, что это функционал типа функции.

Первая идея состоит в том, чтобы положить $\mathcal{E}(x) = u_1(x)$ при $x > 0$, $u_2(x)$ при $x < 0$, где $u_1(x)$ и $u_2(x)$ – два решения однородного уравнения $Lu = 0$, они определены на всей оси (это линейные комбинации функций из фундаментальной системы решений). Но фундаментальное решение определено, конечно, с точностью до прибавления решения однородного уравнения. Поэтому из него можно вычесть $u_1(x)$. Теперь будем искать фундаментальное решение в виде функции

$$\mathcal{E}(x) = \theta(x)u(x), \tag{3}$$

где $\theta(x)$ – функция Хевисайда и $u(x)$ – (бесконечно гладкое) решение уравнения $Lu = 0$ на оси. Сейчас мы увидим, что дело сводится к подбору данных Коши для $u(x)$ в точке 0.

Дифференцируя кусочно-гладкую функцию $\mathcal{E}(x)$ в смысле обобщенных функций (см. п. 2), получаем

$$\mathcal{E}'(x) = \delta(x)u(0) + \theta(x)u'(x).$$

Положим $u(0) = 0$, чтобы при следующем дифференцировании не появилась производная дельта-функции. Теперь

$$\mathcal{E}''(x) = \delta(x)u'(x) + \theta(x)u''(x).$$

Если m велико, мы положим $u'(0) = 0$. И т. д. Окончательно полагаем

$$u(0) = \cdots = u^{(m-2)}(0) = 0, \quad u^{(m-1)}(0) = 1, \tag{4}$$

этим исчерпывается возможность выбора данных Коши. Теперь мы имеем

$$\begin{aligned} L\mathcal{E}(x) &= \delta(x)u^{(m-1)}(0) + \theta(x)[u^{(m)}(x) + a_1 u^{(m-1)}(x) + \cdots + a_m u(x)] \\ &= \delta(x) + \theta(x)Lu(x) = \delta(x), \end{aligned}$$

что и требовалось. Фундаментальное решение построено, это бесконечно гладкая вне начала функция, ее производные в нуле до порядка $m-2$ непрерывны, а производная порядка $m-1$ имеет скачок.

Определение. Обобщенная функция f называется *бесконечно гладкой в области* $O \subset \mathbb{R}^n$, если она действует как функционал типа бесконечно гладкой функции $f(x)$ на основные функции с носителями в O. *Сингулярным носителем* обобщенной функции f называется наименьшее замкнутое множество, вне которого эта функция является бесконечно гладкой. Обозначение: $\operatorname{sing\,supp} f$.

Например, сингулярный носитель дельта-функции $\delta(x - x_0)$ и любой ее производной – точка x_0. Сингулярный носитель только что построенного фундаментального решения – начало координат.

Теперь рассмотрим неоднородное уравнение

$$Lu = f \tag{5}$$

с постоянными коэффициентами. Справа – обычная или обобщенная функция для простоты с компактным носителем. Надо научиться строить частное решение; общее решение получается прибавлением обычного бесконечно гладкого решения однородного уравнения. Это легко:

$$u_0 = \mathcal{E}(x) * f \tag{6}$$

– *частное решение уравнения* (5), так как

$$Lu_0 = (L\mathcal{E}(x)) * f = \delta(x) * f = f.$$

Мы видим, в частности, что построение фундаментального решения и вычисление свертки (6) заменяет процедуру вариации произвольных постоянных (разница на самом деле невелика).

Отметим, что классики определяли фундаментальное решение уравнения $Lu = 0$ как такую функцию $\mathcal{E}(x)$, что для уравнения $Lu = f(x)$ (справа обычная функция) формула

$$u_0(x) = \int \mathcal{E}(x-y) f(y)\, dy$$

дает частное решение.

Фундаментальное решение можно определить и для уравнения с переменными коэффициентами. Это такая обобщенная функция $\mathcal{E}(x, y)$ по x, зависящая от параметра y, что

$$L(x, \partial_x)\, \mathcal{E}(x, y) = \delta(x - y).$$

Его можно строить, если известна фундаментальная система решений однородного уравнения. Подумайте, как.

11. Другие пространства обычных и обобщенных функций. Вот список пространств, которые нужны дальше.

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) &\quad \text{и} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),\\
\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) &\quad \text{и} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),\\
\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) &\quad \text{и} \quad \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n),\\
\mathcal{D}(\Omega) &\quad \text{и} \quad \mathcal{D}'(\Omega),\\
\mathcal{E}(\Omega) &\quad \text{и} \quad \mathcal{E}'(\Omega),\\
\mathcal{D}(K) &\quad \text{и} \quad \mathcal{D}'(K).
\end{aligned}$$

Мы сейчас определим те из этих пространств, которые еще не встречались. Все эти пространства линейны. Пространства в первых трех строчках связаны следующими включениями:

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{E}, \qquad \mathcal{E}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'. \tag{7}$$

Пространство $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ – это пространство Лорана Шварца *быстро убывающих бесконечно гладких функций.* Оно состоит из таких бесконечно гладких функций $\varphi(x)$, что все произведения $x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)$ ограничены (каждое своей постоянной). В нем можно ввести последовательность норм

$$\|\varphi\|_m = \max_{|\alpha|+|\beta|\le m; x} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|, \quad m = 0, 1, \dots. \tag{8}$$

Сходимость в этом пространстве определяется так: $\varphi_j \to \varphi$, если $\|\varphi_j - \varphi\|_m \to 0$ при всех m.

Пространство $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (тоже Шварца) состоит из линейных непрерывных функционалов над $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; Шварц их назвал *умеренными распределениями.*

Этому пространству принадлежит функционал типа локально интегрируемой функции $g(x)$, удовлетворяющей неравенству вида

$$|g(x)| \le C(1 + |x|)^N \tag{9}$$

при каком-нибудь натуральном N. Такие функции называют *медленно растущими.*

В пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ определены дифференцирование и умножение на бесконечно гладкую функцию, у которой каждая производная есть функция медленного роста (проверьте), и (слабая) сходимость.

Будет доказана

Теорема. *Общий вид обобщенной функции f из $\mathcal{S}'$ – это производная некоторого порядка в смысле обобщенных функций от непрерывной функции умеренного роста:*

$$f = \partial^\alpha g(x),$$

где непрерывная функция $g(x)$ удовлетворяет неравенству вида (9).

Пространство $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ состоит из всех бесконечно гладких функций. Сходимость в нем определяется как равномерная сходимость со всеми производными на любом компакте $K \subset \mathbb{R}^n$: $\varphi_j \to \varphi$, если $\partial^\alpha \varphi_j(x) \to \partial^\alpha \varphi(x)$ равномерно на любом компакте при любом α. Можно определить *полунормы*, например, следующим образом:

$$\|\varphi\|_m = \max_{|\alpha| \le m-1, |x| \le m} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \qquad m = 1, 2, \ldots. \tag{10}$$

Полунорма отличается от нормы тем, что из ее равенства нулю на данной функции не следует, что эта функция равна нулю. Ясно, что $\varphi_j \to \varphi$ в этом пространстве, если $\|\varphi_j - \varphi\|_m \to 0$ при всех m.

Пространство $\mathcal{E}' = \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ – это уже знакомое нам пространство обобщенных функций с компактными носителями. Нам предстоит показать, что оно совпадает с пространством линейных непрерывных функционалов над $\mathcal{E}$. Это потребует некоторой подготовки.

В этом пространстве определены дифференцирование, умножение на бесконечно гладкую функцию и (слабая) сходимость.

Пространство $\mathcal{E}(\Omega)$ – это бесконечно гладкие функции в области Ω. Сходимость – равномерная со всеми производными на компактах, лежащих внутри Ω. В частности, полунормы можно определить при помощи компактов

$$\{x \in \Omega : |x| \le m,\ \rho(x, \partial\Omega) \ge 1/m\}, \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{11}$$

где $\rho(x, \partial\Omega)$ – расстояние от точки x до границы $\partial\Omega$ области Ω. Выпишите эти полунормы.

Пространство $\mathcal{D}(K)$ состоит из всех функций из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, носители которых содержатся в заданном компакте K. (Вместо $\mathbb{R}^n$ можно взять область Ω, содержащую K.) Естественные нормы в $\mathcal{D}(K)$ – это

$$\|\varphi\|_{m,K} = max_{|\alpha| \le m; x} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \quad m = 0, 1, \ldots. \tag{12}$$

Наконец, *пространство* $\mathcal{D}'(K)$ состоит из линейных непрерывных функционалов над $\mathcal{D}(K)$.

Всеми этими пространствами пользовался Лоран Шварц. Есть много других полезных пространств обобщенных функций, они обычно придумываются под рассматриваемые задачи.

Обратим внимание на то, что все вложения в (7) являются *непрерывными*: сходимость последовательности сохраняется при переходе в более широкое пространство. Кроме того, пространство $\mathcal{D}$ *плотно* в $\mathcal{S}$ и $\mathcal{E}$. Действительно, если $\psi(x)$ – функция из $\mathcal{S}$ или $\mathcal{E}$, а $\varphi(x)$ – функция из $\mathcal{D}$, равная 1 в окрестности начала, то $\varphi(x/j)\psi(x) \to \psi(x)$ соответственно в $\mathcal{S}$ или $\mathcal{E}$. Проверьте это. Проверьте также полноту пространств $\mathcal{S}$ и $\mathcal{E}$.

ЛЕКЦИЯ 4.

12. Счетно-нормированные пространства. Пространства $\mathcal{S}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}(\Omega)$, $\mathcal{D}(K)$ являются счетно-нормированными. Приведем общее определение счетно-нормированного пространства. Рассматривается линейное пространство X элементов $x, y, \ldots$. На нем введена счетная последовательность полунорм $p_m(x)$, $m = 1, 2, \ldots$ (или норм). *Полунорма* $p(x)$ – это неотрицательная функция со свойствами

$$p(x+y) \le p(x) + p(y) \quad \text{и} \quad p(\lambda x) = |\lambda| p(x)|. \tag{1}$$

Кроме того, потребуем, чтобы из равенств $p_m(x) = 0$ при всех m следовало, что $x = 0$. Сходимость $x_j \to x$ в этом пространстве определяется так:

$$p_m(x_j - x) \to 0 \quad \text{при всех } m.$$

Не ограничивая общности, можно предположить, что последовательность полунорм монотонна: $p_m(x) \le p_{m+1}(x)$ при всех x из m. (Действительно, p_m можно заменить на $p_1 + \cdots + p_m$ при всех m.) Будем считать, что это условие выполнено.

Счетно-нормированное пространство можно превратить в *топологическое пространство*, определив окрестности точек следующим образом:

$$O_{m,\varepsilon}(x) = \{y : p_m(x-y) < \varepsilon\} \tag{2}$$

($\varepsilon > 0$). Это пространство *хаусдорфово*: любые две точки имеют непересекающиеся окрестности. Действительно, если $p_m(x-y) = \delta > 0$ при каком-нибудь m, то достаточно взять $O_{m,\delta/2}(x)$ и $O_{m,\delta/2}(y)$.

Далее, это пространство *метризуемо*: метрику (расстояние) вводим формулой

$$\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{p_k(x-y)}{1 + p_k(x-y)}. \tag{3}$$

Аксиомы метрики легко проверяются: эта функция неотрицательна, равна нулю тогда и только тогда, когда $x = y$, симметрична, т.е. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$, и удовлетворяет неравенству треугольника (последнее проверьте сами). *Метрика инвариантна относительно сдвигов*: $\rho(x-y) = \rho(x-z, y-z)$. Сходимость $x_j \to x$, определенная выше, равносильна сходимости в этом метрическом пространстве. Действительно, справедливо неравенство

$$\rho(x,y) \le p_m(x-y) \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^k} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < p_m(x-y) + \frac{1}{2^m}; \tag{4}$$

из него легко следует, что из сходимости по полунормам следует сходимость по метрике. Обратное утверждение следует из неравенства

$$\frac{p_m(x-y)}{1 + p_m(x-y)} \le 2^m \rho(x,y) \tag{5}$$

при любом m. Действительно, из него вытекает, что

$$\text{если} \quad 2^m\rho(x,y) < \varepsilon < 1/2, \quad \text{то} \quad p_m(x-y) \le \varepsilon/(1-\varepsilon) < 2\varepsilon. \tag{6}$$

Пусть теперь $f(x)$ – функционал (числовая функция) на счетно-нормированном пространстве X. Его непрерывность в точке y можно определить двумя способами. 1) По $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$ при $\rho(x,y) < \delta$. 2) $f(x_j) \to f(y)$ для любой последовательности x_j, сходящейся к y. Эквивалентность этих определений проверяется в точности так же, как в обычном курсе анализа. Это общий факт для функционалов на метрических пространствах. Функционал называется непрерывным, если он непрерывен в каждой точке. Если функционал линеен, то поскольку расстояние инвариантно относительно сдвигов, непрерывность следует из непрерывности в одной точке, например, в нуле.

Следующая теорема будет для нас очень полезна.

Теорема 1. *Непрерывность линейного функционала $f(x)$ равносильна его ограниченности по какой-нибудь из полунорм: найдутся такие m и $C > 0$, что*

$$|f(x)| \le Cp_m(x). \tag{7}$$

Доказательство основано на неравенстве (4) и утверждении (6). Пусть выполнено условие (7); проверим, что наш функционал стремится к 0 при $\rho(x,0) \to 0$. Зададим $\varepsilon > 0$ и предположим, что $2^m\rho(x,0) \le \delta < 1/2$. Тогда в силу (6) $p_m(x) < 2\delta$. Поэтому если дополнительно $2C\delta < \varepsilon$, то из (7) следует, что $|f(x)| < \varepsilon$.

Пусть теперь функционал $f(x)$ стремится к 0 при $\rho(x,0) \to 0$. Тогда, в частности, по $\varepsilon = 1$ найдется такое $\delta > 0$, что из $\rho(x,0) < \delta$ следует $|f(x)| \le 1$. Согласно (4) имеем при любом m

$$\rho(x,0) < p_m(x) + \frac{1}{2^m}.$$

Выберем m так, что $1/(2^m) < \delta/2$. Тогда из $p_m(x) < \delta/2$ следует $|f(x)| < 1$. Теперь от противного проверяется, что если $p_m(x) > 0$, то

$$|f(x)| \le \frac{2}{\delta}\, p_m(x),$$

так как f и p_m при замене x на λx умножаются на $|\lambda|$. Если же $p_m(x) = 0$, то из аналогичных соображений получается, что $f(x) = 0$. Таким образом, неравенство (7) получается с постоянной $C = 2/\delta$. $\square$

Теорема 2. *Пространство линейных непрерывных функционалов над $\mathcal{E}$ совпадает с пространством обобщенных функций из $\mathcal{D}'$ с компактными носителями.*

Доказательство. Пусть f – линейный непрерывный функционал над $\mathcal{E}$. Тогда в силу теоремы 1

$$|\langle f, \varphi\rangle| \le C \sup_{|\alpha|\le m, |x|\le m} |\partial^\alpha \varphi(x)|,$$

где m и C не зависят от φ. Отсюда следует, что $\langle f, \varphi \rangle = 0$, если носитель функции φ не имеет общих точек, скажем, с шаром радиуса $m+1$ с центром в начале. Значит, f имеет компактный носитель. Конечно, этот носитель может быть частью последнего шара.

Обратно, пусть f – обобщенная функция из $\mathcal{D}'$ с компактным носителем и ψ – функция из $\mathcal{D}$, равная 1 в окрестности этого компакта. Тогда

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle f, \psi\varphi \rangle$$

на функциях $\varphi \in \mathcal{D}$. Но по этой формуле f продолжается до линейного непрерывного функционала на $\mathcal{E}$. Именно в смысле возможности продолжения и надо понимать соответствующую часть утверждения теоремы. □

13. Первая встреча с соболевским пространством $H^m(\Omega)$. Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^n$, например, все $\mathbb{R}^n$, и m – целое неотрицательное число. Рассмотрим линеал в $C^m(\Omega)$, состоящий из функций, для которых конечна норма, определяемая равенством

$$\|u\|^2_{m,\Omega} = \sum_{|\alpha| \le m} \int_\Omega |\partial^\alpha u(x)|^2 dx \tag{8}$$

Это линейное пространство со скалярным произведением

$$(u, v)_{m,\Omega} = \sum_{|\alpha| \le m} \int \partial^\alpha u(x)\, \overline{\partial^\alpha v(x)}\, dx. \tag{9}$$

Оно неполно. Его пополнение по норме (8) называется *соболевским пространством* $H^m(\Omega)$. Другое обозначение: $W_2^m(\Omega)$. При $m = 0$ это обычное $L_2(\Omega)$.

Мы откладываем на будущее подробное рассмотрение этого и более общих соболевских пространств. Пока они нам нужны только для того, чтобы доказать теорему 2 из п. 8 об общем виде обобщенной функции с компактным носителем (доказательство будет проведено в п. 14).

Отметим следующее. Если при пополнении появляется элемент u как предел обычных гладких функций $u_k(x)$ по норме, определенной в (8), то это, конечно, функция из $L_2(\Omega)$: $u = u(x)$. Производные $\partial^\alpha u_k(x)$ порядков $|\alpha| \le m$ тоже имеют пределы в $L_2(\Omega)$, мы их обозначим через $\partial^\alpha u(x)$ и назовем *обобщенными производными* функции $u(x)$ порядка α в смысле С.Л. Соболева. В дальнейшем мы увидим, что это производные в смысле обобщенных функций! Норма в (8) и скалярное произведение (9) сохраняют смысл для всех элементов пространства $H^m(\Omega)$. Это, следовательно, гильбертово пространство.

Если H – гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle u, v \rangle$, то согласно теореме Ф. Рисса общий вид линейного непрерывного функционала $f(u)$ над H выражается формулой $f(u) = (u, w)$, где w – фиксированный элемент из H. Отсюда следует, что *общий вид линейного непрерывного функционала $f(u)$ над пространством $H^m(\Omega)$ выражается формулой*

$$f(u) = \sum_{|\alpha| \le m} \int_\Omega \partial^\alpha u(x) w_\alpha(x)\, dx, \tag{10}$$

где $w_\alpha(x)$ – некоторые фиксированные функции из $L_2(\Omega)$.

Будем для простоты считать, что область Ω или совпадает с $\mathbb{R}^n$, или совпадает с полупространством, или ограничена и имеет гладкую (класса C^∞) границу.

Позднее будет доказана *теорема вложения*, принадлежащая С.Л. Соболеву:

Теорема. *При $m > n/2$ пространство $H^m(\Omega)$ непрерывно вложено в пространство $C^0(\overline{\Omega})$ в следующем смысле: каждый элемент $u(x)$ пространства $H^m(\Omega)$ – непрерывная функция (быть может, после исправления на множестве нулевой меры), удовлетворяющая неравенству*

$$|u(x)| \le C\|u\|_{m,\Omega}, \tag{11}$$

где постоянная C зависит только от области Ω. Если $m > N + n/2$, где N – натуральное число, то в аналогичном смысле пространство $H^m(\Omega)$ непрерывно вложено в пространство $C^N(\overline{\Omega})$, при этом справедливо неравенство

$$|\partial^\alpha u(x)| \le C_N\|u\|_{m,\Omega} \quad (|\alpha| \le N). \tag{12}$$

14. Структура обобщенных функций с компактными носителями. Сначала мы выясним структуру обобщенных функций из $\mathcal{D}(K)$, где

$$K = K_a = \{x : |x_j| \le a,\ \ j = 1, \dots, n\}, \tag{13}$$

a – положительное число. Будем называть это множество кубом. Можно рассмотреть и значительно более общие компакты.

В пространстве D_K у нас введена система норм

$$\|\varphi\|_m = \max_{|\alpha|\le m; x\in K} |\partial^\alpha \varphi(x)| \tag{14}$$

Введем вторую систему – соболевских норм

$$\|\varphi\|'_m = \left[\sum_{|\alpha|\le m} \int_\Omega |\partial^\alpha \varphi(x)|^2 dx\right]^{1/2}, \tag{15}$$

где m также пробегает все целые неотрицательные числа, а Ω –внутренность куба K.

Эти две системы *эквивалентны* в следующем смысле: для каждого m найдутся такие m' и C_m, что $\|\varphi\|_m \le C_m\|\varphi\|'_{m'}$, и наоборот. Действительно, очевидно, что

$$\|\varphi\|'_m \le C'_m\|\varphi\|_m,$$

где C'_m легко выражается через объем куба K и m. В обратную сторону утверждение следует из приведенной выше теоремы вложения.

Поэтому сходимость в $\mathcal{D}(K)$ можно определять при помощи соболевских норм (15). Пусть $f(\varphi)$ – линейный непрерывный функционал над $\mathcal{D}(K)$. Согласно теореме 1 в п. 12 он ограничен по некоторой соболевской норме:

$$|f(\varphi)| \le C\|\varphi\|'_m. \tag{16}$$

Тогда он непрерывно продолжается (с сохранением этого неравенства) на замыкание линеала $\mathcal{D}(K)$ в $H^m(\Omega)$. Это не все соболевское пространство $H^m(\Omega)$ (увидим это позже), а некоторое (замкнутое) подпространство в нем. Но по теореме Хана–Банаха наш функционал продолжается теперь до линейного непрерывного функционала на всем пространстве $H^m(\Omega)$.

Выше мы отметили, как выглядит такой функционал. Существуют такие функции $w_\alpha(x) \in L_2(\Omega)$, что

$$f(\varphi) = \sum_{|\alpha|\le m} \int_\Omega w_\alpha(x)\partial^\alpha\varphi(x)\,dx. \tag{17}$$

Этим мы показали, что *каждая обобщенная функция из $\mathcal{D}(K)$ – это конечная сумма производных в смысле обобщенных функций от функций, принадлежащих $L_2(\Omega)$.*

Этот результат мы упростим при помощи интегрирования по частям.

Так как функции $w_\alpha(x)$ принадлежат $L_2(\Omega)$, то они суммируемы – принадлежат $L_1(\Omega)$.

Пусть $g(t)$ и $h(t)$ – суммируемые функции одного переменного на отрезке $[c,d]$. Положим

$$G(t) = \int_c^t g(\tau)\,d\tau, \quad H(t) = \int_c^t h(\tau)\,d\tau \quad (c \le t \le d). \tag{18}$$

Известно, что это абсолютно непрерывные функции и что почти всюду $G'(t) = g(t)$, $H'(t) = h(t)$. При этом справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_c^d G(t)h(t)\,dt + \int_c^d g(t)H(t)\,dt = G(d)H(d) - G(c)H(c). \tag{19}$$

См., например, С. Сакс, Теория интеграла, ИЛ, 1949, стр. 159.

Это позволяет преобразовать интегралы

$$\int_\Omega w_\alpha(x)\partial^\alpha\varphi(x)\,dx$$

следующим образом. Считая, что этот интеграл записан в виде повторных интегралов по $x_1,\dots,x_{n-1}$ от интеграла по x_n, преобразуем последний интегрированием по частям: при почти всех $x' = (x_1,\dots,x_{n-1})$ функцию $w_\alpha(x',x_n)$ заменим ее интегралом по последнему переменному от $-a$ до x_n, а функцию $\partial^\alpha\varphi(x',x_n)$ продифференцируем по этому переменному. Затем, пользуясь теоремой Фубини, поменяем местами интегралы по двум последним переменным

и повторим операцию уже по переменному x_{n-1}. И т.д. В результате функция $w_\alpha(x)$ заменится непрерывной функцией, а порядок дифференцирования функции φ повысится на единицу по каждому переменному.

Затем можно выровнять все порядки дифференцирования – заменить их наибольшими.

Мы получили следующий результат. *Любая обобщенная функция из $\mathcal{D}'(K)$ является функционалом типа производной некоторого порядка от функции, непрерывной в K.* Очевидно, что и наоборот, такой функционал является обобщенной функцией из $\mathcal{D}(K)$. Значит, мы полностью описали $\mathcal{D}(K)$.

Теперь рассмотрим обобщенную функцию f из $\mathcal{E}'$. Мы уже знаем, что она имеет компактный носитель. Пусть $\psi(x)$ – функция из $\mathcal{D}$, равная 1 в окрестности этого носителя. Тогда $f = \psi f$. Пусть a настолько велико, что носитель функции ψ содержится в K_a. Тогда достаточно выяснить, как f действует на основные функции из $\mathcal{D}(K)$. Но это мы уже знаем: как производная некоторого порядка α в смысле обобщенных функций от некоторой непрерывной функции $g(x)$ на K.

Таким образом,

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_K g(x) \partial^\alpha [\psi(x)\varphi(x)]\, dx. \tag{20}$$

Здесь мы можем произвольно продолжить функцию $g(x)$ вне K_a. Продолжим ее так, чтобы получилась функция, непрерывная на $\mathbb{R}^n$ и равная 0 вне $K_{a+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. Наконец, вычислим производную $\partial^\alpha[\psi\varphi]$ по формуле Лейбница. Получим

$$\langle f, \varphi \rangle = \int \sum f_\alpha(x) \partial^\beta \varphi(x)\, dx, \tag{21}$$

где сумма конечна и $f_\alpha(x)$ – финитные непрерывные функции.

Обратно, каждый такой функционал на $\mathcal{D}$ является обобщенной функцией с компактным носителем. Теорема 2 из п. 8 доказана.

ЛЕКЦИЯ 5.

15. Структура обобщенных функций, сосредоточенных в точке. Здесь мы докажем теорему 1 из п. 8.

Пусть f – обобщенная функция из $\mathcal{D}'$, сосредоточенная в нуле. В силу теоремы 1 из п. 12, найдутся такие C, m и h, что

$$|\langle f, \varphi\rangle| \le C \max_{|\alpha|\le m, |x|\le h} |\partial^\alpha \varphi(x)|. \tag{1}$$

Сопоставим функции φ набор значений ее производных в нуле до порядка m; он называется *струей порядка* m этой функции в нуле:

$$j_m(\varphi, 0) = \{\partial^\alpha \varphi(0) : |\alpha| \le m\} \tag{2}$$

(jet=струя). Покажем, что

$$j_m(\varphi, 0) = 0 \Rightarrow \langle f, \varphi\rangle = 0. \tag{3}$$

Отсюда будет следовать, что $\langle f, \varphi\rangle$ можно рассматривать как линейный непрерывный функционал на конечномерном линейном пространстве струй (2), а такой функционал, как известно, имеет вид конечной линейной комбинации $\sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha \partial^\alpha \varphi(0)$. Итак, пусть $j_m(\varphi, 0) = 0$.

Пусть $\psi(x)$ – функция из $\mathcal{D}$, равная 1 при $|x| \le 1/2$ и 0 при $|x| \ge 1$. Положим $\psi_\varepsilon(x) = \psi(x/\varepsilon)$. Так как f сосредоточена в нуле, то

$$\langle f, \varphi\rangle = \langle f, \psi_\varepsilon \varphi\rangle \tag{4}$$

при любом $\varepsilon > 0$. Теперь достаточно показать, что здесь правая часть стремится к 0 при $\varepsilon \to 0$. В силу (1) для этого, в свою очередь, достаточно проверить, что при $|\alpha| \le m$

$$\max_x |\partial^\alpha [\psi_\varepsilon(x)\varphi(x)]| \to 0 \quad (\varepsilon \to 0). \tag{5}$$

По формуле Лейбница

$$\partial^\alpha [\psi_\varepsilon(x)\varphi(x)] = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} c_{\beta,\gamma} \partial^\beta \psi_\varepsilon(x) \cdot \partial^\gamma \varphi(x). \tag{6}$$

Здесь

$$\partial^\beta \psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-|\beta|} (\partial^\beta \psi)(x/\varepsilon),$$
$$\partial^\gamma \varphi(x) = O(\varepsilon^{m+1-|\gamma|}) \text{ на } \operatorname{supp} \psi_\varepsilon.$$

Поэтому выражение (6) есть $O(\varepsilon^{m+1-|\alpha|})$ равномерно по x, так что оно стремится к 0 при $\varepsilon \to 0$. $\square$

16. Структура обобщенных функций из $\mathcal{S}'$. Здесь мы докажем теорему из п. 12. Можно было бы ввести для этого соболевские пространства с весом, но это накладно; вместо этого мы воспользуемся теоремой об общем виде линейного непрерывного функционала на пространстве L_1 с весом. Этим же путем можно было бы доказывать утверждение о структуре обобщенной функции из $\mathcal{D}(K_a)$ – рассматривать линейные непрерывные функционалы на пространстве $L_1(K_a)$ без веса.

Удобно перейти в $\mathcal{S}$ сначала к системе норм

$$p_m(\varphi) = \max_{|\alpha|\le m;x} (1+|x|)^m |\partial^\alpha \varphi(x)|. \tag{7}$$

Эта система норм эквивалентна следующей:

$$p'_m(\varphi) = \max_{|\alpha|\le m} \int (1+|x|)^m |\partial^\alpha \varphi(x)|\, dx.$$

Действительно, так как $(1+|x|)^m = (1+|x|)^{m+n+1}(1+|x|)^{-n-1}$ и функция $(1+|x|)^{-n-1}$ суммируема, то

$$p'_m(\varphi) \le C_m p_{m+n+1}(\varphi).$$

С другой стороны, если конечны все интегральные нормы $p'_m(\varphi)$, то $(1+|x|)^m \partial^\alpha(x)$ в любой точке можно представить в виде

$$\int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} \partial^{(1,\ldots,1)} [(1+|y|)^m \partial^\alpha \varphi(y)]\, dy.$$

Это позволяет оценить каждую норму $p_m(\varphi)$ через интегральные нормы подходящего большего порядка.

Пусть теперь $f \in \mathcal{S}'$. Согласно теореме 1 из п. 12 найдутся такие C и m, что

$$|\langle f, \varphi\rangle| \le C p'_m(\varphi). \tag{8}$$

Теперь сопоставим функции φ вектор-функцию $\{\partial^\alpha \varphi(x)\}$, где $|\alpha| \le m$. Эта вектор-функция лежит в векторном пространстве $L_1(\mathbb{R}^n, (1+|x|)^m)$ с весом $(1+|x|)^m$. Если вес – единица, то, как известно, сопряженное пространство отождествляется с пространством $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ ограниченных измеримых функций, причем любой непрерывный линейный функционал над $L_1(\mathbb{R}^n)$ имеет вид

$$f(\varphi) = \int g(x)\varphi(x)\, dx,$$

где $g(x)$ – ограниченная измеримая функция. Аналогично обстоит дело в случае L_1 с весом – см. Данфорд и Шварц, Линейные операторы, т. 1, стр.314. Продолжив наш функционал до ограниченного линейного функционала на векторном весовом пространстве L_1, получаем, что он реализуется в виде

$$\sum_{|\alpha|\le m} \int (1+|x|)^m g_\alpha(x) \partial^\alpha \varphi(x)\, dx,$$

где $g_\alpha(x)$ – ограниченные измеримые функции. Очевидно, что

$$f_\alpha(x) = (1+|x|)^m g_\alpha(x)$$

– измеримые функции умеренного роста. Так как производные $\partial^\alpha \varphi(x)$ быстро убывают, то при помощи интегрирования по частям можно заменить функции $g_\alpha(x)$ непрерывными функциями, а затем выровнять порядки производных. Интегрировать функции $f_\alpha(x)$ по каждому переменному надо при этом от конечной точки, скажем, от нуля. Мы видим, что каждая обобщенная функция из $\mathcal{S}'$ имеет структуру, указанную в формулировке теоремы. Обратно, функционал такой структуры всегда принадлежит к $\mathcal{S}'$. □

II. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ОБЫЧНЫХ И ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

1. Преобразование Фурье на $\mathcal{S}$. Преобразование Фурье функции $u(x) \in L_1(\mathbb{R}^n)$ определяется формулой

$$u(x) \mapsto v(\xi) = (Fu)(\xi) = \int e^{-ix\xi} u(x)\, dx. \tag{9}$$

Здесь и дальше $x \cdot \xi = \sum x_j \xi_j$; ξ_j пока вещественны. Так как модуль экспоненты под знаком интеграла – единица, то очевидно, что $v(\xi)$ – ограниченная функция. (Можно показать, что она стремится к 0 на бесконечности.)

Мы сейчас будем рассматривать функции $u = \varphi \in \mathcal{S}$.

Положим

$$D_j = i^{-1}\partial_j = i^{-1}\partial/\partial x_j, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}.$$

Интегрированием по частям легко проверяется формула

$$F[D_j \varphi] = \xi_j F[\varphi] \tag{10}$$

(именно по этой причине при использовании преобразования Фурье производные D_j удобнее, чем ∂_j). Отсюда следует, что

$$F[D^\alpha \varphi] = \xi^\alpha F[\varphi] \tag{11}$$

при любом α. Далее, рассмотрим линейный оператор в частных производных с постоянными коэффициентами

$$a(D) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha D^\alpha. \tag{12}$$

Из (11) следует, что

$$F[a(D)\varphi] = a(\xi) F[\varphi], \tag{13}$$

где функция

$$a(\xi) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha \xi^\alpha \tag{14}$$

называется (полным) *символом* оператора $a(D)$. Например, символ оператора Лапласа Δ (и главный символ, см. ниже) равен $-|\xi|^2$.

Отметим, что символ определяется и для операторов с переменными коэффициентами: если

$$a(x,D)=\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)D^\alpha, \tag{15}$$

то (полным) *символом* этого оператора называется функция

$$a(x,\xi)=\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\xi^\alpha. \tag{16}$$

Главный символ того же оператора – старшая однородная часть символа:

$$a_0(x,\xi)=\sum_{|\alpha|= m} a_\alpha(x)\xi^\alpha \tag{17}$$

(вместо a_0 часто пишут a_m). Если главный символ не обращается в нуль при вещественных $\xi\ne 0$, то оператор называется *эллиптическим.*

Еще одна полезная формула получается из (9) дифференцированием по ξ_j под знаком интеграла:

$$D_jF[\varphi](\xi)=F[-x_j\varphi(x)]. \tag{18}$$

Из нее следует, что

$$D^\alpha F[\varphi](\xi)=F[(-1)^{|\alpha|}x^\alpha\varphi(x)]. \tag{19}$$

Теорема 1. *Пусть $\varphi(x)\in\mathcal{S}$ и $\psi(\xi)=F[\varphi(x)]$. Тогда $\psi\in\mathcal{S}$.*

Действительно, из (11) видно, что все $\xi^\alpha\psi(\xi)$ – ограниченные функции, так что $\psi(\xi)$ быстро убывает. Далее, $\psi(\xi)$ непрерывна (это видно из определения преобразования Фурье) и имеет непрерывные производные любого порядка – см. (19), причем эти производные тоже быстро убывают. $\square$

Обратное преобразование Фурье определяется на функциях из $L_1(\mathbb{R}^n)$ формулой

$$v(\xi)\mapsto u(x)=F^{-1}[v(\xi)]=\frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\cdot\xi}v(\xi)\,d\xi. \tag{20}$$

Теорема 2. *На функциях из $\mathcal{S}$ прямое и обратное преобразования Фурье взаимно обратны.*

Доказательство. Пусть для простоты $n=1$. Имеем, используя предельный переход под знаком интеграла и теорему Фубини,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int e^{ix\xi}\int\varphi(y)e^{-iy\xi}dyd\xi=\\ \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int e^{ix\xi-\varepsilon|\xi|}\int\varphi(y)e^{-y\xi}dyd\xi=\\ \lim_{\varepsilon\to 0}\int\varphi(y)\frac{1}{2\pi}\int e^{-i(y-x)\xi-\varepsilon|\xi|}d\xi dy.\end{aligned} \tag{21}$$

Здесь

$$\int_0^\infty e^{-it\xi-\varepsilon\xi}d\xi = \frac{e^{-it\xi-\varepsilon\xi}}{-it-\varepsilon}\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{it+\varepsilon},$$
$$\int_{-\infty}^0 e^{-it\xi+\varepsilon\xi}d\xi = \frac{e^{-it\xi+\varepsilon\xi}}{-it+\varepsilon}\Bigg|_{-\infty}^0 = \frac{1}{-it+\varepsilon}.$$

Сумма этих двух интегралов равна $2\varepsilon/(\varepsilon^2+t^2)$. Если ее разделить на 2π и проинтегрировать, получим 1. Отсюда вытекает, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\frac{\varepsilon}{(y-x)^2+\varepsilon^2}\,dy = \varphi(x). \tag{22}$$

Это проверяется очевидным образом: интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(y)-\varphi(x)|\frac{\varepsilon}{(y-x)^2+\varepsilon^2}\,dy$$

разбивается в сумму интегралов по $|y-x|<r$ и $|y-x|>r$ с малым фиксированным r, в первом мал модуль разности $|\varphi(y)-\varphi(x)|$, второй стремится к 0 при $\varepsilon\to 0$.

[Отметим, что фактически мы здесь имеем свертку функции φ) с функциями, образующими дельтаобразное семейство:

$$\varphi(x) * \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \to \varphi(x) * \delta(x) = \varphi(x)$$

при $\varepsilon\to 0$. Но формально здесь затруднительно ссылаться на приготовленные раньше теоремы.]

То же самое получается, если написать преобразования в обратном порядке. На многомерный случай доказательство распространяется без труда. □

Более общая теорема обращения доказывается в курсе функционального анализа.

Замечание. Формулу (13) можно теперь переписать в виде

$$a(D) = F^{-1}a(\xi)F. \tag{23}$$

На операторы в частных производных с переменными коэффициентами эта формула обобщается так:

$$a(x,D) = F^{-1}_{\xi\mapsto x}a(x,\xi)F_{x\mapsto\xi}. \tag{24}$$

Позднее мы увидим, что псевдодифференциальный оператор в $\mathbb{R}^n$ с символом $a(x,\xi)$ определяется именно такой формулой. Но там символы уже не будут обязательно многочленами по ξ.

Теорема 3. *Преобразование Фурье устанавливает непрерывный в обе стороны изоморфизм между $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x)$ и $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_\xi)$.*

Доказательство. Уже показано, что

$$F[\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x)] = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_\xi).$$

Легко проследить, что каждая норма функции в последнем пространстве оценивается через некоторые нормы ее прообраза Фурье в предыдущем пространстве. И наоборот. □

ЛЕКЦИЯ 6.

Теорема 4. *Свертка двух функций из $\mathcal{S}$ принадлежит $\mathcal{S}$. При преобразовании Фурье она переходит в произведение образов Фурье этих функций:*

$$F[\varphi * \psi] = F[\varphi]F[\psi].$$

Доказательство. Первое утверждение мы могли доказать раньше. Очевидно, что свертка двух функций из $\mathcal{S}$

$$\int \varphi(x-y)\psi(y)\,dy$$

допускает дифференцирование под знаком интеграла любое число раз. Если ее умножить на $|x|^N$, то этот множитель можно оценить под знаком интеграла через $(|x-y|+|y|)^N$. Отсюда видно, что свертка и все ее производные быстро убывают.

Второе утверждение проверяется при помощи теоремы Фубини:

$$\int e^{-ix\cdot\xi}\int \varphi(x-y)\psi(y)\,dydx = \int e^{-iy\cdot\xi}\psi(y)\,dy\int e^{-i(x-y)\cdot\xi}\varphi(x-y)\,dx.$$

Остается заменить под знаком внутреннего интеграла $x-y$ на x. □

Отметим заодно следующее утверждение.

Теорема 5. *Свертка функции φ из $\mathcal{S}$ с непрерывной медленно растущей функцией $f(x)$ определена и является бесконечно гладкой медленно растущей функцией.*

Доказательство. Записав эту свертку в виде

$$(\varphi * f)(x) = \int \varphi(x-y)f(y)\,dy,$$

можем неограниченно дифференцировать ее под знаком интеграла. Получаются непрерывные функции. Функция $f(y)$ при больших $|y|$ мажорируется выражением $(|x-y|+|x|)^N$ при некотором N, и тогда свертка не может расти быстрее $|x|^N$ на бесконечности. □

2. Преобразование Фурье на пространстве $\mathcal{S}'$. Если $f(x)$ – функция из $L_1(\mathbb{R}^n)$, то ее преобразование Фурье определяет непрерывный линейный функционал над $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ по формуле

$$\begin{aligned}\langle F[f](\xi),\psi(\xi)\rangle &= \iint e^{-ix\cdot\xi}f(x)\,dx\,\psi(\xi)\,d\xi = \int f(x)\int e^{-ix\cdot\xi}\psi(\xi)\,d\xi dx\\ &= \langle f(x), F[\psi](x)\rangle. \qquad (1)\end{aligned}$$

Здесь второе равенство вытекает из теоремы Фубини. К ψ применяется не обратное, а прямое преобразование Фурье. Принимая эту формулу за образец, *полагаем*

$$\langle F[f],\psi\rangle = \langle f, F[\psi]\rangle \qquad (f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_x),\ \psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_\xi)). \qquad (2)$$

Автоматически получается следующий важный результат.

Теорема 6. *Преобразование Фурье обобщенной функции из $\mathcal{S}'$ – обобщенная функция из $\mathcal{S}'$. Более того, отображение $f \mapsto F[f]$ – непрерывный в обе стороны изоморфизм пространства $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_x)$ на пространство $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_\xi)$.*

Обратное преобразование Фурье определяется для обобщенных функций, конечно, формулой

$$\langle F^{-1}[g], \varphi\rangle = \langle g, F^{-1}[\varphi]\rangle \qquad (g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_\xi),\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x)). \tag{3}$$

Пример 1. *Преобразование Фурье дельта-функции – единица.* Немного более общий результат:

$$F[\delta(x-y)] = e^{-iy\cdot\xi}. \tag{4}$$

Действительно,

$$\langle \delta(x-y), \int e^{-ix\cdot\xi}\psi(\xi)\,d\xi\rangle = \int e^{-iy\cdot\xi}\psi(\xi)\,d\xi.$$

Пример 2. Справедлива формула

$$F[1] = (2\pi)^n\delta(\xi). \tag{5}$$

Действительно,

$$\langle F[1], \psi\rangle = \langle 1, F[\psi]\rangle = \int dx \int e^{-ix\cdot\xi}\psi(\xi)\,d\xi =$$
$$(2\pi)^n \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{iy\cdot\xi}dx \int e^{-ix\cdot\xi}\psi(\xi)\,d\xi\Big|_{y=0},$$

что равно $(2\pi)^n\psi(0)$ в силу формулы обращения преобразования Фурье.

Задачи. 1. Найдите преобразование Фурье от экспоненты $e^{ih\cdot x}$ (h – вещественный вектор).

2. Найдите преобразование Фурье функции Хевисайда $\theta(x)$. Указание: используйте формулу

$$\theta(x) = \lim_{\varepsilon\to+0}\theta(x)e^{-\varepsilon x}.$$

Ответ: $-i/(\xi - i0)$.

Теорема 7. *Для обобщенных функций f из $\mathcal{S}'$*

$$F[D_j f] = \xi_j F[f]. \tag{6}$$

Действительно, пусть $\psi(\xi) \in \mathcal{S}$. Тогда

$$\langle F[D_j f], \psi\rangle = \langle D_j f, F[\psi]\rangle = -\langle f, D_j \int e^{-ix\cdot\xi}\psi(\xi)\,d\xi\rangle =$$
$$\langle f, \int e^{-ix\cdot\xi}\xi_j\psi(\xi)\,d\xi\rangle = \langle f, F[\xi_j\psi(\xi)]\rangle =$$
$$\langle F[f], \xi_j\psi(\xi)\rangle = \langle \xi_j F[f], \psi\rangle.$$

Следствие. *Если $a(D)$ – оператор в частных производных с постоянными коэффициентами, то для обобщенных функций f из $\mathcal{S}'$*

$$a(D)f = F^{-1}a(\xi)Ff. \tag{7}$$

3. Преобразования Фурье обобщенных функций с компактными носителями.

Если $f(x)$ – непрерывная или хотя бы суммируемая функция с компактным носителем, то ее обычное преобразование Фурье можно неограниченно дифференцировать под знаком интеграла, так что это бесконечно гладкая ограниченная функция. Более того, оно аналитически продолжается до целой аналитической функции

$$g(\zeta) = \int e^{-ix\zeta} f(x)\,dx, \quad \zeta = \xi + i\tau.$$

Можно также отметить, что его можно рассматривать как результат действия функции $f(x)$ на экспоненту $e^{-ix\cdot\xi}$ как функцию из $\mathcal{E}$, зависящую от ξ как от параметра:

$$\int e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,dx = \langle f(x), e^{-ix\cdot\xi}\rangle. \tag{8}$$

Эти наблюдения легко обобщаются на обобщенные функции с компактными носителями:

Теорема 1. *Пусть $f \in \mathcal{E}'$. Тогда $F[f]$ – медленно растущая бесконечно гладкая функция, допускающая продолжение до целой аналитической функции. При этом справедлива формула*

$$F[f] = \langle f, e^{-ix\cdot\xi}\rangle. \tag{9}$$

Действительно, достаточно рассмотреть случай $f = D^\alpha f_\alpha(x)$, где $f_\alpha(x)$ – финитная непрерывная функция. В силу теоремы 7 из предыдущего пункта в этом случае

$$F[f] = \xi^\alpha F[f_\alpha(x)] = \xi^\alpha \int e^{-ix\cdot\xi} f_\alpha(x)\,dx$$

– медленно растущая бесконечно гладкая функция, и она продолжается до целой аналитической функции. Ее можно записать в виде

$$F[f] = \langle f_\alpha(x), \xi^\alpha e^{-ix\cdot\xi}\rangle = \langle f_\alpha(x), (-1)^{|\alpha|} D_x^\alpha e^{-ix\cdot\xi}\rangle = \langle D^\alpha f_\alpha(x), e^{-ix\cdot\xi}\rangle.$$

чем и заканчивается доказательство. □

4. Преобразование Фурье свертки обобщенных функций.

Теорема 1. *Пусть f и g – обобщенные функции соответственно из $\mathcal{S}'$ и $\mathcal{E}'$.* Тогда свертка $f * g$ принадлежит $\mathcal{S}'$ и

$$F[f * g] = F[f]F[g]. \tag{10}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $g = \partial^\alpha g_\alpha(x)$, где $g_\alpha(x)$ – финитная непрерывная функция.

Пусть $\varphi \in \mathcal{S}$. Имеем

$$\langle f * g, \varphi\rangle = \langle f(x), \langle \partial^\alpha g_\alpha(y), \varphi(x+y)\rangle\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle f(x), \int g_\alpha(y)\partial^\alpha\varphi(x+y)\,dy\rangle.$$

Здесь интеграл по y можно неограниченно дифференцировать под знаком интеграла, и получающиеся интегралы быстро убывают (умножив такой интеграл на $|x|^N$, можно оценить этот множитель под знаком интеграла через $(|x+y|+|y|)^N$). Значит, f действует на основную функцию из $\mathcal{S}$, так что $f*g$ – линейный непрерывный функционал над $\mathcal{S}$.

Далее,

$$\langle F[f*g],\psi\rangle = \langle f*g, F[\psi]\rangle = \langle f(x), \langle g(y), \int \psi(\xi)e^{-i(x+y)\cdot\xi}d\xi\rangle\rangle. \tag{11}$$

Здесь выражение во внутренних угловых скобках равно

$$\int g_\alpha(y)(-1)^\alpha D_y^\alpha \int \psi(\xi)e^{-i(x+y)\cdot\xi}d\xi dy = \int\Big[\int g_\alpha(y)e^{-iy\cdot\xi}\,dy\Big]\xi^\alpha\psi(\xi)e^{-ix\cdot\xi}d\xi = \int F[g_\alpha](\xi)\xi^\alpha\psi(\xi)e^{-ix\cdot\xi}d\xi = F[F[g](\xi)\psi(\xi)].$$

Поэтому выражение (11) можно переписать в виде

$$\langle f, F[F[g](\xi)\psi(\xi)]\rangle = \langle F[f], F[g]\psi\rangle = \langle F[f]F[g],\psi\rangle,$$

что и доказывает наше утверждение. □

5. Преобразование Фурье на $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$. Пусть φ – функция из $\mathcal{D}$. Ее преобразование Фурье

$$\psi(\xi) = \int \varphi(x)e^{-ix\cdot\xi}dx \tag{12}$$

продолжается до целой аналитической функции

$$\psi(\zeta) = \int \varphi(x)e^{-ix\cdot\zeta}dx. \tag{13}$$

Пусть $a = (a_1,\dots,a_n)$ – вектор из положительных чисел, положим

$$K_a = \{x : |x_j| \le a_j,\ j = 1,\dots,n\} \tag{14}$$

и будем называть это множество брусом (раньше мы рассматривали куб с одинаковыми a_j). Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(K_a)$, т.е. это основная функция с носителем в K_a. Тогда при всех натуральных N справедливы оценки

$$|\zeta|^N|\psi(\zeta)| \le C_N e^{\sum_1^n a_j|\tau_j|}. \tag{15}$$

(Действительно, умножение интеграла (13) на ζ_j равносильно его дифференцированию по x_j, а производная перебрасывается с экспоненты на $\varphi(x)$ интегрированием по частям.) В частности, функция $\psi(\zeta)$ быстро убывает при $|\tau_j| \le \text{const}$, $\xi \to \infty$ и является целой функцией экспоненциального типа. (Целая аналитическая функция $F(z)$ называется функцией экспоненциального типа, если справедливо неравенство $|F(x)| \le c_1 e^{c_2|z|}$.)

Введем *пространство* $\mathcal{Z}_a$, оно будет состоять из целых аналитических функций $\psi(\zeta)$ с оценками (15).

Теорема 1. *Обратное преобразование Фурье функции $\psi \in Z_a$ принадлежит $\mathcal{D}(K_a)$.*

Доказательство. Для простоты пусть $n = 1$. Запишем формулу Коши для $\psi(\xi)$:

$$\psi(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\psi(z)}{z - \xi}\, dz,$$

где контур C охватывает точку ξ. Будем считать, что это окружность радиуса 1. Этот интеграл можно неограниченно дифференцировать под знаком интеграла, и легко проверить, что все производные быстро убывают (если написать $|\xi|^N$ перед продифференцированным любое число раз интегралом, то этот множитель можно оценить через $(|\xi - z| + |z|)^N$ под знаком интеграла.) Поэтому $\psi \in \mathcal{S}$ и, значит, прообраз Фурье этой функции

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int \psi(\xi) e^{ix\xi} d\xi \tag{16}$$

принадлежит $\mathcal{S}$. Осталось показать, что функция $\varphi(x)$ равна 0 нулю вне K_a. Это делается подходящим сдвигом линии интегрирования в (16), возможным в силу оценок (15). Например, пусть $x > a$. Тогда переписываем (16) в виде

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int \psi(\xi + i\tau) e^{ix(\xi + i\tau)} d\xi.$$

При положительном τ подинтегральное выражение не превосходит по модулю

$$C(1 + |\xi|)^{-2} e^{(a-x)\tau},$$

так что интеграл стремится к нулю при $\tau \to +\infty$. Поэтому $\varphi(x) = 0$.

Обобщение на многомерный случай получается без труда. □

Замечание. По существу мы доказали вариант теоремы Пэли–Винера, в которой описаны преобразования Фурье функции из $L_2(\mathbb{R})$, равной 0 вне отрезка. (Оно принадлежит L_2 и продолжается до целой функции экспоненциального типа.) Другой вариант можно было бы добавить к п. 3. Преобразование Фурье обобщенной функции с носителем, лежащим в K_a, – это целая функция $g(\zeta)$ с оценкой вида

$$|g(\zeta)| \le C(1 + |\zeta|)^N e^{\sum_1^n a_j |\tau_j|} \tag{17}$$

с фиксированным N.

В пространстве $\mathcal{Z}_a$ назовем последовательность функций $\{\psi_n\}$ *сходящейся*, если их прообразы Фурье образуют сходящуюся последовательность в $\mathcal{D}(K_a)$. Теперь преобразование Фурье устанавливает непрерывный в обе стороны изоморфизм между $\mathcal{D}(K_a)$ и $\mathcal{Z}_a$.

ЛЕКЦИЯ 7.

Наконец, введем *пространство* $\mathcal{Z}$ – объединение пространств $\mathcal{Z}_a$ по всем a. Это пространство преобразований Фурье всех функций из $\mathcal{D}$. Последовательность функций $\{\psi_j\}$ в $\mathcal{Z}$ назовем *сходящейся*, если она принадлежит $\mathcal{Z}_a$ при некотором a и там сходится. Получаем:

Теорема 2. *Преобразование Фурье устанавливает непрерывный в обе стороны изоморфизм между $\mathcal{D}$ и $\mathcal{Z}$.*

Теперь введем *пространство* $\mathcal{Z}'$ линейных непрерывных функционалов над $\mathcal{Z}$ и определим *преобразование Фурье обобщенной функции f из $\mathcal{D}'$* формулой

$$\langle F[f], \psi\rangle = \langle f, F[\psi]\rangle \quad (\psi \in \mathcal{Z}), \tag{1}$$

аналогичной формуле для преобразования Фурье обобщенной функции из $\mathcal{S}'$. Сразу получается

Теорема 3. *Преобразование Фурье устанавливает непрерывный в обе стороны изоморфизм между $\mathcal{D}'$ и $\mathcal{Z}'$.*

Эти определения и теоремы принадлежат И.М. Гельфанду и Г.Е. Шилову. Лоран Шварц рассматривал преобразования Фурье на $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$.

Задачи. Перенесите на обобщенные функции f из $\mathcal{D}'$ формулу для $F[D_j f]$, формулу для $a(D)f$ и теорему о преобразовании Фурье свертки с обобщенной функцией из $\mathcal{E}'$ из лекции 6.

Следует отметить, что функционалы из $\mathcal{Z}'$ могут определяться интегралами по контурам в комплексной плоскости. Гельфанд и Шилов назвали такие функционалы *аналитическими*. Например, дельта-функция оказывается аналитическим функционалом:

$$\langle \delta(\zeta - \zeta_0), \psi(\zeta)\rangle = \psi(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\psi(\zeta)}{\zeta - \zeta_0}\, d\zeta, \tag{2}$$

где контур охватывает точку ζ_0.

Умножение на функцию $h(\zeta)$ определено в $\mathcal{Z}$ и $\mathcal{Z}'$, если это целая аналитическая функция, удовлетворяющая неравенствам вида (17) из лекции 6. Запишите определение умножения в $\mathcal{Z}'$.

Пусть для простоты $n = 1$. Заметим, что *для функции $\psi(\zeta)$ из $\mathcal{Z}$ тейлоровское разложение*

$$\psi(\zeta - z) = \sum_0^\infty \psi^{(k)}(\zeta)\frac{(-1)^k z^k}{k!} \tag{3}$$

справедливо в смысле сходимости в этом пространстве. Это следует из того, что двойственное разложение в $\mathcal{D}$

$$\sum_0^\infty (ix)^k \frac{z^k}{k!}\varphi(x) = e^{ixz}\varphi(x)$$

сходится в $\mathcal{D}$ (так как тейлоровский ряд для экспоненты сходится равномерно на любом компакте и то же верно после почленного дифференцирования).

Отсюда мы сейчас выведем, что *обобщенные функции из $\mathcal{Z}'$ не только бесконечно дифференцируемы, но и аналитичны – разложимы в ряды Тейлора.* Это означает следующее. Определим *сдвиг* $g(\zeta + z)$ обобщенной функции $g = g(\zeta)$ формулой

$$\langle g(\zeta + z), \psi(\zeta)\rangle = \langle g(\zeta), \psi(\zeta - z)\rangle. \tag{4}$$

(Такое определение полезно и в применении к обобщенным функциям из $\mathcal{S}'$ или $\mathcal{D}'$, напишите его.) *Утверждается, что*

$$g(\zeta + z) = \sum_0^\infty g^{(k)}(\zeta)\frac{z^k}{k!} \tag{5}$$

в смысле сходимости в $\mathcal{Z}'$. Действительно,

$$\langle g(\zeta + z), \psi(\zeta)\rangle = \langle g(\zeta), \psi(\zeta - z)\rangle = \sum_0^\infty \langle g(\zeta), \frac{(-1)^k z^k}{k!}\psi^{(k)}(\zeta)\rangle,$$

так как ряд Тейлора функции $\psi \in \mathcal{Z}$, как отмечено выше, сходится к ней в $\mathcal{Z}$. Отсюда получаем (5) в $\mathcal{Z}'$.

Эти замечания легко обобщаются на многомерный случай.

III. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ К ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

1. Фундаментальные решения уравнений с постоянными коэффициентами. Рассмотрим общее уравнение в частных производных с постоянными коэффициентами

$$a(D)u(x) = 0. \tag{6}$$

Его *фундаментальным решением* мы назвали такую обобщенную функцию $\mathcal{E}$, что

$$a(D)\mathcal{E} = \delta(x). \tag{7}$$

Оно определено с точностью до прибавления любого решения однородного уравнения (6).

Теорема 1. *Фундаментальное решение существует для любого $a(D)$. Более того, существует фундаментальное решение, принадлежащее $\mathcal{S}'$.*

Первое утверждение доказали Мальгранж и независимо Эренпрайс (1953-4). Хёрмандер (не опубликовано) и Трев (1956) дали конструктивное доказательство. (Позднее мы его разберем.) Более трудное второе утверждение доказали Лояшевич и независимо Хёрмандер (1958). (B. Malgrange, L. Ehrenpreis, L. Hörmander, F. Treves, S. Lojasiewicz.)

Теперь приведем простые, но важные утверждения.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{E}$ – фундаментальное решение уравнения* (6)*, и пусть f – обобщенная функция с компактным носителем. Тогда свертка*

$$u = \mathcal{E} * f \tag{8}$$

является частным решением неоднородного уравнения

$$a(D)u = f. \tag{9}$$

Действительно,

$$a(D)[\mathcal{E} * f] = [a(D)\mathcal{E}] * f = \delta(x) * f = f.$$

Здесь, однако, надо пояснить следующее. Перебрасывание производных с одного сомножителя в свертке на другой отмечено у нас в случае, когда они оба – обобщенные функции с компактным носителем. Однако если только один из них имеет компактный носитель, то можно использовать следующий стандартный прием. Рассмотрим свертку на основных функциях с носителями в фиксированной ограниченной области. Тогда сомножитель с некомпактным носителем можно, не меняя свертки, умножить на финитную бесконечно гладкую функцию, равную 1 в шаре достаточно большого радиуса. Поэтому последняя выкладка корректна. □

Теорема 3. *Пусть $u(x)$ – решение уравнения* (9) *из $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, и пусть $\mathcal{E}$ – фундаментальное решение уравнения* (6)*. Тогда u выражается формулой* (8)*.*

Действительно,

$$u = \delta(x) * u = a(D)\mathcal{E} * u = \mathcal{E} * a(D)u = \mathcal{E} * f.$$

Теорема 4. *Фундаментальное решение уравнения Лапласа*

$$\Delta u = 0 \tag{10}$$

в $\mathbb{R}^n$ имеет вид

$$\mathcal{E}_n(x) = \frac{c_n}{|x|^{n-2}} \quad при \quad n > 2, \qquad \mathcal{E}_2(x) = c_2 \log |x|, \tag{11}$$

где c_n – некоторые постоянные.

Доказательство и вычисление постоянных c_n немного отложим. Обратим внимание на то, что это локально интегрируемые функции, бесконечно гладкие вне начала координат. При всех n сингулярный носитель – начало координат.

Задача. Постройте фундаментальное решение для $n = 1$, т.е. для уравнения $u'' = 0$. См. лекцию 3.

Мы продолжим изучение и использование фундаментальных решений в дальнейших пунктах. До этого в п. 2 устраним небольшие недоработки, оставшиеся у нас при изучении свертки.

2. Еще две теоремы о свертке.

Теорема 1. *Свертка $h_1 * h_2$ – бесконечно гладкая функция, если либо $h_1 \in \mathcal{D}'$, $h_2 \in \mathcal{D}$, либо $h_1 \in \mathcal{E}$, $h_2 \in \mathcal{E}'$.*

Доказательство. Запишем определение свертки

$$\langle (h_1 * h_2), \varphi \rangle = \langle h_1(x), \langle h_2(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle.$$

Докажем первое утверждение. Снова фиксируя ограниченную область, в которой находится носитель функции φ, можем предположить, что h_1 имеет компактный носитель. Тогда достаточно рассмотреть случай, в котором $h_1 = \partial^\alpha \widetilde{h}_1(x)$, где $\widetilde{h}_1(x)$ – финитная непрерывная функция. В этом случае

$$h_1 * h_2 = \partial^\alpha \int \widetilde{h}_1(y) h_2(x-y)\, dy$$

– производная в смысле обобщенных функций. Но легко видеть, что интеграл – бесконечно гладкая финитная функция. Поэтому производную можно рассматривать в обычном смысле.

Второе утверждение проверяется аналогично; убедитесь в этом самостоятельно. □

Теорема 2. *Пусть $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и $g \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Тогда*

$$\operatorname{supp}(f * g) \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g, \tag{12}$$

$$\operatorname{sing\,supp}(f * g) \subset \operatorname{sing\,supp} f + \operatorname{sing\,supp} g. \tag{13}$$

Доказательство. Обе формулы следуют из определения свертки

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \tag{14}$$

Проверим первую. Возьмем сколь угодно малое $\varepsilon > 0$. Пусть бесконечно гладкие функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ равны 1 в $\varepsilon/4$-окрестностях носителей обобщенных функций f и g соответственно и нулю вне $\varepsilon/2$-окрестностей. Тогда в написанной формуле можно заменить f на $\psi_1(x)f$ и g на $\psi_2(y)g$. Эти множители можно перенести к $\varphi(x+y)$. Если теперь φ равна нулю в ε-окрестности суммы $\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$, то $\psi_1(x)\psi_2(y)\varphi(x+y) = 0$.

Проверим вторую. Для любого $\varepsilon > 0$ сделаем такое разбиение:

$$f = f_1 + f_2, \quad g = g_1 + g_2,$$

где f_1 и g_1 равны нулю вне $\varepsilon/2$-окрестностей сингулярных носителей обобщенных функций f и g, а вторые слагаемые – бесконечно гладкие функции, причем g_2 имеет компактный носитель. Имеем

$$f * g = f_1 * g_1 + f_2 * g_1 + f_1 * g_2 + f_2 * g_2.$$

Здесь носитель свертки $f_1 * g_1$ находится в ε-окрестности суммы сингулярных носителей обобщенных функций f и g. Остальные слагаемые – бесконечно гладкие в силу теоремы 1. □

3. Гипоэллиптические операторы. Очевидно, что если u – обобщенная функция, то

$$\operatorname{supp} a(D)u \subset \operatorname{supp} u \quad \text{и} \quad \operatorname{sing\,supp} a(D)u \subset \operatorname{sing\,supp} u. \tag{15}$$

Оператор $a(D)$ называется *гипоэллиптическим*, если всегда

$$\operatorname{sing\,supp} u = \operatorname{sing\,supp} a(D)u, \tag{16}$$

иначе говоря, если решение уравнения $a(D)u = f$ всегда является бесконечно гладким в области, в которой f – бесконечно гладкая функция. Можно говорить и о гипоэллиптическом уравнении.

Теорема 1. *Для того чтобы оператор $a(D)$ был гипоэллиптическим, необходимо и достаточно, чтобы фундаментальное решение $\mathcal{E}$ уравнения $a(D)u = 0$ было бесконечно гладким вне начала координат.*

Доказательство. Небходимость очевидна, так как $a(D)\mathcal{E} = \delta(x)$. Докажем достаточность. Пусть $a(D)u = f$ в $\mathbb{R}^n$ и $f \in C^\infty$ в области Ω. Зафиксируем точку $x_0 \in \Omega$ и докажем, что она не принадлежит сингулярному носителю решения. Возьмем функцию $\psi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, равную 1 вблизи x_0 и нулю вне окрестности, лежащей внутри Ω. Имеем $a(D)[\psi u] = f_1$, где $f_1 = f$ вблизи x_0, так что x_0 не принадлежит $\operatorname{sing\,supp} f_1$. Далее, $u = \mathcal{E} * f_1$ по теореме 3 из п. 1 и $\operatorname{sing\,supp}[\psi u] \subset \operatorname{sing\,supp} f_1$ по теореме 2 из п. 2. Значит, x_0 не принадлежит $\operatorname{sing\,supp} u$. □

В частности, уравнение Лапласа гипоэллиптично.

Существуют алгебраические критерии гипоэллиптичности (по свойствам многочлена $a(\xi)$). Один из них состоит в следующем:

Теорема 2. *Оператор $a(D)$ гипоэллиптичен тогда и только тогда, когда расстояние $d(\xi)$ от точки $\xi \in \mathbb{R}^n$ до поверхности $\{\zeta \in \mathbb{C}^n : a(\zeta) = 0\}$ стремится к бесконечности при $\xi \to \infty$.*

На доказательстве останавливаться не будем. Это доказательство и другие критерии можно найти, например, в книге Л. Хёрмандера "Линейные дифференциальные операторы с частными производными", М., Мир, 1965.

В частности, эллиптические операторы (т. е. операторы $a(D)$ с отличным от 0 при $\xi \neq 0$ главным символом $a_0(\xi)$) гипоэллиптичны.

Задача. Выведите это из только что приведенного критерия гипоэллиптичности.

Мы *докажем* гипоэллиптичность эллиптических уравнений позднее даже при переменных (бесконечно гладких) коэффициентах средствами исчисления псевдодифференциальных операторов.

На самом деле решения эллиптических уравнений $a(D)u = f$ *аналитически гипоэллипичны*: если для каждой точки некоторой области правая часть уравнения разлагается в ряд Тейлора по степеням расстояния от этой точки, то то же верно для решения. Обратное утверждение тоже справедливо: из аналитической гипоэллиптичности уравнения $a(D)u = 0$ вытекает его эллиптичность. Это теорема И.Г. Петровского (доказанная им для уравнений с аналитическими коэффициентами).

ЛЕКЦИЯ 8.

4. Транспонированный оператор. Замена переменных. Этот и следующий пункты содержат полезный технический материал.

Определение. Пусть L и ${}^tL$ – два непрерывных оператора на пространстве основных функций $\mathcal{X}$, связанные формулой

$$\langle L\psi, \varphi\rangle = \langle \psi, {}^tL\varphi\rangle \quad (\varphi, \psi \in \mathcal{X}). \tag{1}$$

Тогда оператор ${}^tL$ называется *транспонированным* к L. Пусть теперь оператор L продолжен до непрерывного оператора на пространстве обобщенных функций $\mathcal{X}'$ по формуле

$$\langle Lf, \varphi\rangle = \langle f, {}^tL\varphi\rangle \quad (\varphi \in \mathcal{X}, f \in \mathcal{X}'). \tag{2}$$

Тогда по-прежнему ${}^tL$ называется оператором, транспонированным к L.

Примеры:

1) Оператор дифференцирования: $L = D^\alpha, \quad {}^tL = (-1)^{|\alpha|}D^\alpha$.

2) Оператор умножения на функцию: $L = a(x)\cdot = {}^tL$.

3) Линейный оператор в частных производных:

$$L = a(x,D) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)D^\alpha, \;\; {}^tL = {}^ta(x,D) = \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|}D^\alpha[a_\alpha(x)\cdot].$$

4) Преобразование Фурье: $L = F = {}^tL$.

Уточните сами предположения об $a(x)$ в примере 2 в зависимости от пространства $\mathcal{X}$, о коэффициентах в примере 3) и о пространствах в примере 4.

5) Оператор сдвига $Lf(x) = f(x - x_0), \;\; {}^tL\varphi(x) = \varphi(x + x_0)$.

Например, $\delta(x - x_0)$ является сдвигом обобщенной функции $\delta(x)$:

$$\langle \delta(x - x_0), \varphi(x)\rangle = \langle \delta(x), \varphi(x + x_0)\rangle. \tag{3}$$

6) Можно рассмотреть более общие обратимые гладкие замены переменных. Пусть задан диффеоморфизм $\chi : x \mapsto y = y(x)$ области Ω_1 на область Ω_2, и пусть $\psi(y)$ – функция на Ω_2. Формула

$$(\chi^*\psi)(x) = \psi(\chi(x)) = \psi(y(x)) \tag{4}$$

определяет отображения

$$C^\infty(\Omega_2) \to C^\infty(\Omega_1), \quad L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega_2) \to L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega_1), \quad \mathcal{D}(\Omega_2) \to \mathcal{D}(\Omega_1). \tag{5}$$

Чтобы продолжить χ^* до отображения $\mathcal{D}'(\Omega_2) \to \mathcal{D}'(\Omega_1)$, найдем транспонированный оператор. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$, $\psi \in \mathcal{D}(\Omega_2)$. Тогда

$$\int \psi(y(x))\varphi(x)\,dx = \int \psi(y)\varphi(x(y))|\det \partial x/\partial y|\,dy,$$

где $x = x(y)$ – обратный к χ диффеоморфизм области Ω_2 на область Ω_1 и справа появился модуль определителя Якоби. Таким образом,

$$({}^t\chi^*)(\varphi(x)) = \varphi(x(y))|\det \partial x/\partial y|. \tag{6}$$

Для обобщенных функций f положим

$$\langle \chi^* f, \varphi(x)\rangle = \langle f, \varphi(x(y))|\det \partial x/\partial y|\rangle. \tag{7}$$

7) Еще один важный частный случай – *гомотетия*:

$$\chi(x) = y = tx, \quad (\chi^*)\psi(x) = \psi(tx) \quad (t > 0). \tag{8}$$

Она определена, в частности, в $\mathcal{D}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{E}$. Транспонированный оператор имеет вид $\varphi(x) \mapsto t^{-n}\varphi(y/t)$. Для обобщенных функций f (из $\mathcal{D}'$, $\mathcal{S}'$, $\mathcal{E}'$) определение гомотетии $f(x) \mapsto f(tx)$ принимает вид

$$\langle f(tx), \varphi(x)\rangle = t^{-n}\langle f(y), \varphi(y/t)\rangle,$$

или

$$\langle f(tx), \varphi(x)\rangle = t^{-n}\langle f(x), \varphi(x/t)\rangle. \tag{9}$$

Иногда нужна гомотетия с отрицательным t; тогда в (9) t^{-n} заменяется на $|t|^{-n}$.

5. Однородные обобщенные функции.

Определение. Обобщенная функция f называется (положительно) *однородной степени* s, если

$$f(tx) = t^s f(x) \quad (t > 0), \tag{10}$$

т.е.

$$t^{-n}\langle f(x), \varphi(x/t)\rangle = t^s\langle f(x), \varphi(x)\rangle \quad (t > 0). \tag{11}$$

Примеры и замечания. 1. Функция $|x|^s$ на $\mathbb{R}^n$ локально интегрируема при $s > -n$. Функционал типа этой функции является, конечно, однородной обобщенной функцией той же степени. Проведите сами формальную проверку.

2. Дельта-функция однородна степени $-n$:

$$\langle \delta(tx), \varphi(x)\rangle = t^{-n}\langle \delta(x), \varphi(x/t)\rangle = t^{-n}\varphi(0).$$

3. *Если обобщенная функция f однородна степени s, то любая ее производная однородна степени $s - 1$.*

Действительно,

$$t^{-n}\langle \partial_j f, \varphi(x/t)\rangle = -t^{-n}\langle f, \partial_j\varphi(x/t)\rangle = -t^{-n-1}\langle f, (\partial_j\varphi)(x/t)\rangle.$$

Из (11) следует, что правая часть равна

$$-t^{s-1}\langle f, \partial_j\varphi(x)\rangle = t^{s-1}\langle \partial_j f, \varphi(x)\rangle,$$

что и доказывает наше утверждение.

4. *Уравнение Эйлера для однородных обобщенных функций.* Уравнение Эйлера для обычных однородных степени s функций имеет, как известно, вид

$$\sum_1^n x_j \partial_j f(x) = sf(x). \tag{12}$$

Это условие эквивалентно однородности функции f степени s. Проверим, что это утверждение остается в силе для обобщенных функций. Для них уравнение (12) означает, что

$$-\langle f, \sum \partial_j (x_j \varphi(x))\rangle = s\langle f, \varphi\rangle,$$

или

$$-\langle f, \sum x_j \partial_j \varphi(x)\rangle = (s+n)\langle f, \varphi\rangle. \tag{13}$$

Пусть f – обобщенная функция, однородная степени s. Это означает, что

$$\langle f, \varphi(x/t)\rangle = t^{s+n}\langle f, \varphi(x)\rangle.$$

Продифференцируем это тождество по t. Чтобы обосновать приведенное ниже вычисление производной левой части, следует временно заменить f подходящей обобщенной функцией с компактным носителем и использовать структуру таких обобщенных функций. Получим

$$-\langle f, \sum x_j t^{-2} \partial_j \varphi(x/t)\rangle = (s+n)t^{s+n-1}\langle f, \varphi(x)\rangle.$$

Полагая $t = 1$, получаем (13).

Обратно, пусть имеет место соотношение (13). Рассмотрим дробь

$$\frac{\langle f, \varphi(x/t)\rangle}{t^{s+n}}.$$

Продифференцируем ее по t. Получим

$$\frac{-\langle f, \sum x_j t^{-2} \partial_j \varphi(x/t)\rangle t^{s+n} - \langle f, \varphi(x/t)\rangle (s+n) t^{s+n-1}}{t^{2(s+n)}} = 0$$

в силу (13) с x/t вместо x. Значит,

$$\frac{\langle f, \varphi(x/t)\rangle}{t^{s+n}} = \text{const} = \langle f, \varphi(x)\rangle,$$

т.е. f однородна степени s. □

5. *Пусть обобщенная функция f однородна степени s. Тогда ее преобразование Фурье однородно степени $-n-s$.*

Действительно, нам дано соотношение (11), и надо проверить, что

$$t^{-n}\langle Ff, \psi(\xi/t)\rangle = t^{-s-n}\langle Ff, \psi(\xi)\rangle. \tag{14}$$

Пусть $\varphi(x) = F[\psi(\xi)]$. Левая часть в (14) равна

$$t^{-n}\langle f, F[\psi(\xi/t)]\rangle = t^{-n}\langle f, \int \psi(\xi/t)e^{-ix\cdot\xi}d\xi\rangle.$$

Здесь в интеграле делаем замену $\xi/t = \eta$. Получаем, что правая часть равна $\langle f, \varphi(xt)\rangle$, т.е., с учетом (11),

$$t^{-n-s}\langle f, \varphi(x)\rangle = t^{-n-s}\langle f, F[\psi(\xi)]\rangle = t^{-n-s}\langle Ff, \psi(x)\rangle,$$

что совпадает с правой частью в (14). □

6. Фундаментальное решение уравнения Лапласа. Уравнение

$$\Delta\mathcal{E} = \delta(x) \tag{15}$$

при преобразовании Фурье переходит в уравнение

$$-|\xi|^2 F\mathcal{E} = 1. \tag{16}$$

Умножим его на $-1/|\xi|^2$. Это формальная операция, так как обобщенные функции мы умеем умножать только на бесконечно гладкие функции. Однако рассмотрим получающуюся формулу

$$(F\mathcal{E})(\xi) = -\frac{1}{|\xi|^2}. \tag{17}$$

Здесь справа – локально интегрируемая функция, *если* $n \geq 3$. В этом случае ее обратное преобразование Фурье – обобщенная функция, однородная степени $-n+2$. Кроме того, правая часть в (17) сферически симметрична, т.е. не меняется при поворотах системы координат. Отсюда можно вывести, что ее обратное преобразование Фурье тоже сферически симметрично. (Здесь ЗАДАЧА. Обозначив через χ поворот системы координат, найдите найдите χ^* для обобщенных функций и проверьте, что сферическая симметрия обобщенной функции влечет сферическую симметрию ее преобразования Фурье, как прямого, так и обратного.)

Сказанное позволяет предположить, что фундаментальное решение $\mathcal{E}$ можно найти в виде

$$\mathcal{E}_n(x) = \frac{c_n}{|x|^{n-2}}, \tag{18}$$

при $n \geq 3$ это тоже локально интегрируемая функция. Это подтверждается следующей выкладкой, использующей формулу Грина для оператора Лапласа:

$$\int_\Omega [\Delta u(x)\cdot v(x)\,dx - u(x)\cdot\Delta v(x)]\,dx = \int_\Gamma [\partial_\nu u(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot\partial_\nu v(x)]\,dS. \tag{19}$$

Здесь Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей Γ, ∂_ν – производная по внешней нормали, u и v – функции класса $C^2(\overline{\Omega})$.

Мы имеем, полагая $r = |x|$,

$$\langle \Delta r^{-n+2}, \varphi \rangle = \langle r^{-n+2}, \Delta\varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{r \geq \varepsilon} r^{-n+2} \Delta\varphi(x)\, dx.$$

Окрестность начала вырезана из-за особенности у r^{-n+2}. По формуле Грина (19), интеграл в правой части равен (с учетом того, что ∂_r – производная по внутренней нормали)

$$\int_{r \geq \varepsilon} \Delta r^{-n+2} \cdot \varphi(x)\, dx - \int_{r=\varepsilon} r^{-n+2} \partial_r \varphi(x)\, dS + \int_{r=\varepsilon} \partial_r r^{-n+2} \cdot \varphi(x)\, dS.$$

Справа первый интеграл равен нулю, так как функция r^{-n+2} гармонична вне начала координат. Второй стремится к нулю, так как "площадь" сферы радиуса ε имеет порядок ε^{n-1}. Третий стремится к $-(n-2)\sigma_{n-1}\varphi(0)$, где σ_{n-1} – площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

Таким образом,

$$\Delta \frac{1}{r^{n-2}} = \widetilde{c}_n \delta(x), \quad \text{где} \quad \widetilde{c}_n = -(n-2)\sigma_{n-1}, \tag{20}$$

при $n \geq 3$, так что в этом случае

$$\mathcal{E}_n(x) = \frac{1}{\widetilde{c}_n r^{n-2}} \tag{21}$$

– фундаментальное решение.

Площадь единичной сферы σ_{n-1} обычно вычисляется в курсе анализа. Напомним кратко, как это делается.

Положим

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx, \quad I_n = \int_{R^n} e^{-|x|^2} dx.$$

Ясно, что $I_n = I_1^n$. Вычисляя интеграл I_n переходом к сферическим координатам и подстановкой $r^2 = t$, получаем

$$I_n = \sigma_{n-1} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{n-1} dr = \sigma_{n-1} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{n}{2}-1} dt = \frac{\sigma_{n-1}}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

Кроме того,

$$I_2 = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr = \pi,$$

так что $I_1 = \sqrt{\pi}$, $I_n = \pi^{n/2}$. В итоге

$$\sigma_{n-1} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}. \tag{22}$$

Используя известные формулы для гамма-функции, в частности, формулу $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, получаем окончательно

$$\sigma_{2k+1} = \frac{2\pi^{k+1}}{k!}, \qquad \sigma_{2k} = \frac{2(2\pi)^k}{(2k-1)!!}, \tag{23}$$

где в последнем знаменателе – произведение нечетных чисел от 1 до $2k-1$.

Для фундаментального решения при $n = 3$ получается формула

$$\mathcal{E}_3(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}. \tag{24}$$

Случай $n = 2$. При $n = 2$ функция r^{-2} не является локально интегрируемой и наше первоначальное рассуждение не проходит. Но если начать с функции $\ln r$, гармонической вне начала, то можно заметить следующее. Обобщенная функция $\Delta \ln r$ сосредоточена в начале координат и, значит, является линейной комбинацией дельта-функции и ее производных. Но первые производные логарифма однородны степени -1 (и, как и логарифм, локально интегрируемы). Поэтому обобщенная функция $\Delta \ln r$ однородна степени -2. Значит, она пропорциональна дельта-функции:

$$\Delta \ln r = \widetilde{c}_2 \delta(x).$$

Постоянная вычисляется, как выше, при помощи формулы Грина для оператора Лапласа; она равна 2π.

Задача: проведите это вычисление.

Таким образом, при $n = 2$ получается фундаментальное решение

$$\mathcal{E}_2(x) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}. \tag{25}$$

Как строятся фундаментальные решения общих эллиптических уравнений с постоянными коэффициентами, можно прочитать в книге И.М. Гельфанда и Г.Е. Шилова “Обобщенные функции и действия над ними”.

ЛЕКЦИЯ 9.

6. Фундаментальное решение общего уравнения с постоянными коэффициентами.

Теорема. *Для любого уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами*

$$a(D)u = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha D^\alpha u = 0 \tag{1}$$

существует фундаментальное решение $\mathcal{E}$.

Доказательство (Хёрмандер). Пусть $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ и $\psi(\xi) = F^{-1}[\varphi]$. Мы положим

$$\langle \mathcal{E}, \varphi\rangle = \langle F\mathcal{E}, \psi\rangle = \int_H \frac{\psi(\zeta)}{a(\zeta)} d\xi, \tag{2}$$

где H – некоторая поверхность в $\mathbb{C}^n$, "параллельная" $\mathbb{R}^n$.

При $n = 1$ достаточно взять прямую

$$\{\zeta = \xi + i\tau : \ \xi \in \mathbb{R}^n\}$$

с таким постоянным τ, что она не проходит через нули многочлена $a(\zeta)$. Тогда интеграл существует и

$$\langle a(D)\mathcal{E}, \varphi\rangle = \langle \mathcal{E}, a(-D)\varphi\rangle =$$
$$\int_H \frac{a(\zeta)\psi(\zeta)}{a(\zeta)} d\xi = \int_H \psi(\zeta)\, d\xi = \int_R \psi(\xi)\, d\xi = \varphi(0),$$

что и требуется. Здесь использованы быстрое убывание функции $\psi(\xi)$ в полосе $|\operatorname{Im}\zeta| \le \text{const}$ и формула

$$\varphi(x) = \int e^{-ix\cdot\xi}\psi(\xi)\, d\xi.$$

При $n > 1$ мы предположим, что в $a(D)$ коэффициент при старшей производной D_n^m – ненулевое число.

Задача. Покажите, что этого всегда можно добиться подходящим поворотом системы координат.

Выход в комплексную область осуществляется тогда по переменному ζ_n при каждом $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$. Если фиксировать ξ', то можно выбрать такое $\tau = \tau(\xi')$, что, скажем, $|\tau| \le m + 1$ и

$$|a(\xi', \xi_n + i\tau)| \ge \text{const} > 0 \tag{3}$$

при всех ξ_n, где постоянная не зависит от ξ.

Далее, каждая точка ξ_0' имеет окрестность $O(\xi_0')$ в $\mathbb{R}^{n-1}$, такую, что неравенство вида (3) (с вдвое меньшей константой) выполнено при всех ξ с $\tau = \tau(\xi_0')$. Из покрытия пространства $\mathbb{R}^{n-1}$ такими окрестностями можно

выбрать локально конечное. Таким образом, можно указать такое покрытие $\{O_j\}_1^\infty$ пространства $\mathbb{R}^{n-1}$ и такие значения $\tau = \tau_j$, что $|\tau_j| \le m+1$ и

$$|a(\xi', \xi_n + i\tau_j)| \ge \text{const} > 0 \quad \text{при } \xi' \in O_j,\ \xi_n \in \mathbb{R} \tag{4}$$

с постоянной, не зависящей от j. Заменим O_j на

$$\Omega_1 = O_1,\ \Omega_2 = O_2 \setminus \Omega_1,\ \Omega_3 = O_3 \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$$

и т.д. Теперь определим H как множество всех точек

$$\zeta = (\xi', \xi_n + i\tau),\ \text{где } \tau = \tau_j \text{ при } \xi' \in \Omega_j. \tag{5}$$

Это множество называют *лестницей Хёрмандера*. Проверка того, что формула (2) определяет фундаментальное решение, проводится так же, как в одномерном случае.

Задача. Проведите эту проверку.

Этим доказательство заканчивается. □

7. Решения гипоэллиптических уравнений с изолированными особенностями. Мы докажем теорему о структуре решения гипоэллиптического уравнения с постоянными коэффициентами вне некоторой точки, при подходе к которой это решение оценивается по модулю некоторой степенью расстояния от нее.

Теорема 1. *Пусть $a(D)$ – гипоэллиптический оператор, $\mathcal{E}(x)$ – фундаментальное решение уравнения $a(D)u = 0$, Ω – область в $\mathbb{R}^n$, содержащая начало координат, и $u(x)$ – функция из $C^\infty(\Omega \setminus \{0\})$, удовлетворяющая уравнению $a(D)u = 0$ в $\Omega \setminus \{0\}$. Предположим, что вблизи начала*

$$|u(x)| \le C|x|^{-N} \tag{6}$$

с некоторыми положительными постоянными C и N. Тогда

$$u(x) = \sum_{|\alpha| \le s} c_\alpha \partial^\alpha \mathcal{E}(x) + u_0(x) \tag{7}$$

при некотором s, где c_α – постоянные и $u_0(x)$ – решение уравнения $a(D)u_0 = 0$ в Ω.

Ввиду гипоэллиптичности $u_0 \in C^\infty(\Omega)$ и $\mathcal{E}(x)$ – бесконечно гладкая функция вне начала координат. Для доказательства теоремы понадобится следующая лемма.

Лемма. *Пусть функция $u(x)$ принадлежит $C^\infty(\Omega \setminus \{0\})$ и удовлетворяет условию (6) вблизи начала. Тогда существует такая обобщенная функция $\widetilde{u} \in \mathcal{D}(\Omega)$, что ее сужение на Ω совпадает с $u(x)$.*

Доказательство. Пусть функция $\psi(x)$ из $\mathcal{D}(\Omega)$ равна 1 вблизи начала. Полагаем для $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\langle \widetilde{u}, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x) \left[\varphi(x) - \psi(x) \sum_{|\alpha| \le N-1} \frac{\partial^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha \right] dx. \tag{8}$$

Функция в квадратных скобках есть $O(|x|^N)$. Поэтому интеграл сходится и определяет, конечно, обобщенную функцию в Ω. Если $\varphi(x) = 0$ в окрестности начала, то $\widetilde{u}$ действует на φ как $u(x)$. $\square$

Доказательство теоремы. Используя лемму, имеем

$$a(D)\widetilde{u} = a(D)u = 0 \quad \text{в } \Omega \setminus \{0\}.$$

Поэтому носитель обобщенной функции $a(D)\widetilde{u}$ – точка 0 и

$$a(D)\widetilde{u} = \sum_{|\alpha| \le s} c_\alpha \partial^\alpha \delta(x). \tag{9}$$

Положим

$$u_0(x) = \widetilde{u} - \sum_{|\alpha| \le s} c_\alpha \partial^\alpha \mathcal{E}(x).$$

Это обобщенная функция из $\mathcal{D}'(\Omega)$, и ввиду (9) $a(D)u_0 = 0$ в Ω, так что $u_0 \in C^\infty(\Omega)$. В $\Omega \setminus \{0\}$ получаем (7). $\square$

В качестве следствия получается *теорема об устранимой особенности для гармонических функций.* Пусть снова Ω – область в $\mathbb{R}^n$, содержащая начало координат.

Теорема 2. *Пусть $u(x)$ – гармоническая функция в $\Omega \setminus \{0\}$, и пусть вблизи начала*

$$u(x) = o(|x|^{-n+2}), \text{ если } n \ge 3, \quad o(\ln |x|^{-1}), \text{ если } n = 2. \tag{10}$$

Тогда $u(x)$ – гармоническая функция в Ω.

Действительно, из предположения (10) следует, что в (7) все c_α равны 0, это получается последовательно, начиная с α с наибольшим $|\alpha|$, с учетом формул для фундаментального решения. $\square$

8. Теорема Лиувилля и ее обобщения. Теорема Лиувилля для гармонических функций будет приведена в конце этого пункта. Мы начнем с более общей теоремы.

Теорема 1. *Пусть $a(0) = 0$ и $a(\xi) \ne 0$ при остальных вещественных ξ, $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и $a(D)u = 0$. Тогда u – многочлен.*

Доказательство. Пусть $v = Fu$. Тогда $a(\xi)v = 0$. Поэтому обобщенная функция v сосредоточена в начале. Действительно, если $\psi \in \mathcal{D}$ равна 0 в окрестности начала, то

$$\langle v, \psi \rangle = \langle v, a(\xi) \frac{\psi(\xi)}{a(\xi)} \rangle = \langle a(\xi)v, \frac{\psi(\xi)}{a(\xi)} \rangle = 0.$$

Значит,

$$v(x) = \sum_{|\alpha|\le s} b_\alpha \partial^\alpha \delta(x), \quad u(x) = \sum_{|\alpha|\le s} c_\alpha x^\alpha. \ \square$$

Напомним, что $u \in \mathcal{S}'$, если, например, это непрерывная функция умеренного роста (т.е. роста не выше степенного). В частности, это может быть обычное (достаточно гладкое) решение. Таким образом, обычное решение $u(x)$ умеренного роста оказывается многочленом. Если же предположить, что $u(x)$ – ограниченное обычное решение, то получим, что это постоянная. Например, то и другое верно для гармонических функций. Теорема о постоянстве ограниченной в $\mathbb{R}^n$ гармонической функции – это и есть *теорема Лиувилля*.[1]

Отметим, что условие $a(\xi) \neq 0$ при $\xi \neq 0$ существенно в теореме: если $a(\xi_0) = 0$ при некотором $\xi_0 \neq 0$, то имеется решение $e^{ix\cdot\xi_0}$.

Задача. Пусть $a(\xi) \neq 0$ при всех вещественных ξ. Проверьте, что тогда решение $u \in \mathcal{S}$ уравнения $a(D)u = 0$ оказывается тождественным нулем.

9. Однородные обобщенные функции (окончание). Этот пункт содержит существенные дополнения к п. 5.

Аналитическое продолжение обобщенной функции f^λ. Обобщенная функция f_λ, зависящая от числового параметра λ, называется *аналитической по λ* в некоторой области на комплексной плоскости, если числовая функция $\langle f_\lambda, \varphi\rangle$ аналитична по λ в этой области.

Пусть $f(x)$ – положительно однородная степени 1 непрерывная функция, положительная при $x \neq 0$. Функция $f^\lambda(x)$ локально интегрируема при $\operatorname{Re}\lambda > -n$ и определяет, конечно, аналитическую обобщенную функцию в этой полуплоскости. Рассмотрим вопрос о ее аналитическом продолжении. Запишем

$$\langle f^\lambda, \varphi\rangle = \int_\Omega f^\lambda(x)[\varphi(x) - \varphi(0)]\,dx + \int_{R^n\setminus\Omega} f^\lambda(x)\varphi(x)\,dx + \varphi(0)\int_\Omega f^\lambda(x)\,dx, \quad (11)$$

где Ω – какая-нибудь ограниченная область, содержащая начало координат. Функцию φ считаем принадлежащей $\mathcal{D}$. Чтобы осуществить аналитическое продолжение, преобразуем последний интеграл. Используя уравнение Эйлера для f^λ, имеем

$$\int_\Omega f^\lambda(x)\,dx = \frac{1}{\lambda}\sum_1^n \int_\Omega x_k \partial_k f^\lambda(x)\,dx.$$

Интегрируя справа по частям, получаем, что

$$\int_\Omega f^\lambda(x)\,dx = \frac{1}{\lambda}\int_\Gamma f^\lambda(x)\omega - \frac{n}{\lambda}\int_\Omega f^\lambda(x)\,dx, \quad (12)$$

где Γ – граница области Ω (предполагаем границу гладкой) и форма ω определяется равенством

$$\omega = x_1 dx_2 \dots dx_n - x_2 dx_1 dx_3 \dots dx_n + \dots + (-1)^{n-1} x_n dx_1 \dots dx_{n-1}. \quad (13)$$

[1] Для гармонической вещественной функции известно более сильное утверждение: она постоянна, если ограничена с одной стороны.

Таким образом,

$$\int_\Omega f^\lambda(x)dx = \frac{1}{\lambda+n}\int_\Gamma f^\lambda\omega \tag{14}$$

и

$$\langle f^\lambda,\varphi\rangle = \int_\Omega f^\lambda[\varphi(x)-\varphi(0)]\,dx + \int_{R^n\setminus\Omega} f^\lambda(x)\varphi(x)\,dx + \frac{\varphi(0)}{\lambda+n}\int_\Gamma f^\lambda(x)\,\omega. \tag{15}$$

По этой формуле левая часть аналитически продолжается в полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda > -n-1$, проколотую в точке $\lambda=-n$, где имеется, вообще говоря, простой полюс с вычетом

$$\varphi(0)\int_\Gamma \frac{\omega}{f^n(x)}. \tag{16}$$

В силу единственности аналитического продолжения это вычет не зависит от выбора области Ω. Можно сказать, что *обобщенная функция f^λ аналитически продолжена в полуплоскость* $\operatorname{Re}\lambda > -n-1$ *без точки $-n$ с простым полюсом в этой точке и вычетом*

$$\delta(x)\int_\Gamma \frac{\omega}{f^n(x)}. \tag{17}$$

Геометрический смысл интеграла, входящего в выражение для вычета, легко выясняется при помощи формулы Стокса. Пусть Ω – область, определяемая неравенством $f(x)<1$. Так как

$$\int_{\partial\Omega}\omega = \int_\Omega d\omega = n\int_\Omega dx = n\operatorname{Vol}(\Omega),$$

то этот интеграл есть объем указанной области, умноженный на размерность n.

Возможно и дальнейшее аналитическое продолжение обобщенной функции f^λ, для чего в (11) из $\varphi(x)$ надо вычитать не $\varphi(0)$, а бóльшие части тейлоровского разложения этой функции. Получается мероморфная по λ обобщенная функция с возможными простыми полюсами в точках $-n-m$, где m пробегает все натуральные числа. См. И.М. Гельфанд и Г.Е. Шилов, Обобщенные функции и действия над ними.

Сказанное, в частности, приложимо к обобщенной функции r^λ. Можно показать, что $r^\lambda/\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)$ продолжается до целой аналитической функции от λ.

ЛЕКЦИЯ 10.

Преобразование Фурье обобщенной функции r^λ. Преобразование Фурье g_λ в смысле обобщенных функций от r^λ, $\lambda \in (-n, 0)$, должно быть однородно степени $-n-\lambda$, а это число тоже принадлежит $(-n, 0)$. Можно ожидать, что $g_\lambda = C_\lambda \rho^{-n-\lambda}$ с учетом того, что обе эти функции локально интегрируемы и сферически симметричны. Здесь $\rho = |\xi|$. Приняв этот факт без доказательства, как фактически делают Гельфанд и Шилов, можно подсчитать коэффициент C_λ.

Для этого в равенство

$$\langle g_\lambda, \psi \rangle = \langle r^\lambda, \varphi \rangle,$$

где $\varphi = F[\psi]$, подставим $\varphi(x) = e^{-r^2/2}$ и воспользуемся тем, что в одномерном случае

$$F^{-1}[e^{-x^2/2}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2/2}.$$

Получим

$$\int r^\lambda e^{-r^2/2} dx = C_\lambda (2\pi)^{-n/2} \int \rho^{-n-\lambda} e^{-\rho^2/2} d\xi.$$

В этих интегралах надо перейти к сферическим координатам, после чего сделать замены $r = \sqrt{2t}$ и $\rho = \sqrt{2\tau}$. В итоге получим

$$C_\lambda = 2^{\lambda+n} \pi^{n/2} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}. \tag{1}$$

Этот результат обобщается на те λ, которые не являются полюсами аналитически продолженной обобщенной функции r^λ.

В частности, этим путем можно найти преобразование Фурье от r^{-n+2} при $n \geq 3$ для нахождения фундаментального решения уравнения Лапласа:

$$F[r^{-n+2}] = C_{-n+2} \rho^{-2}, \quad \text{где} \quad C_{-n+2} = \frac{2(n-2)\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Однородные функции степени $-n$. Пусть $f(x)$ – непрерывная при $x \neq 0$ функция, однородная степени $-n$. Может ли она определять функционал типа функции несмотря на неинтегрируемую особенность? Мы сейчас не предполагаем, что она сохраняет знак.

Рассмотрим предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon \leq r \leq h} f(x)\varphi(x)\, dx = \int f(x)[\varphi(x) - \varphi(0)]\, dx + \varphi(0) \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon \leq r \leq h} f(x)\, dx,$$

где $\varphi \in \mathcal{D}$ и h настолько велико, что носитель этой функции лежит в шаре $O_h(0)$ радиуса h с центром в начале. Последний интеграл запишем в сферических координатах ($x = r\eta$):

$$\int_{\varepsilon \leq r \leq h} r^{-1} dr \int_{r=1} f(\eta)\, dS.$$

Для его сходимости при $\varepsilon \to 0$ *необходимо и достаточно*, чтобы интеграл от f по единичной сфере равнялся нулю:

$$\int_{r=1} f(\eta)\, dS = 0. \tag{2}$$

При этом условии $\langle f(x), \varphi(x)\rangle$ *существует как интеграл в смысле главного значения по Коши*:

$$\langle f(x), \varphi(x)\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{r\geq\varepsilon} f(x)\varphi(x)\, dx = \int f(x)[\varphi(x) - \varphi(0)]\, dx. \tag{3}$$

Примеры функций $f(x)$, удовлетворяющих условию (2), при $n = 2$:

$$\frac{x_1^2 - x_2^2}{|x|^4}, \qquad \frac{x_1 x_2}{|x|^4}.$$

Дифференцирование функций, однородных степени $-n+1$. Пусть функция $f(x)$ однородна степени $-n+1$. Она определяет функционал типа функции, и это однородная обобщенная функция степени $-n+1$. Подсчитаем ее производные в смысле обобщенных функций. Это будут однородные обобщенные функции степени $-n+1$. Запишем их в виде

$$-\langle f, \partial_j \varphi\rangle = -\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon\leq r\leq h} f(x)\partial_j[\varphi(x) - \varphi(0)]\, dx,$$

где h такое же, как выше, и проинтегрируем по частям. Получим

$$-\langle f, \partial_j \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \Bigg[\int_{\varepsilon\leq r\leq h} \partial_j f(x)\cdot[\varphi(x) - \varphi(0)]\, dx$$
$$+\varphi(0)\int_{r=h} f(x)\omega_j - \int_{r=\varepsilon} f(x)[\varphi(x) - \varphi(0)]\omega_j \Bigg], \tag{4}$$

где форма ω_j определяется равенством

$$\omega_j = (-1)^{j-1} dx_1 \ldots dx_{j-1} dx_{j+1} \ldots dx_n. \tag{5}$$

Справа в (4) первый интеграл имеет предел при $\varepsilon \to 0$, а последний стремится к нулю. Получаем

$$-\langle f, \partial_j \varphi\rangle = \int_{r\leq h} \partial_j f(x)\cdot[\varphi(x) - \varphi(0)]\, dx + \varphi(0)\int_{r=h} f(x)\omega_j. \tag{6}$$

Последний интеграл, как легко проверить, не зависит от h. *Это и есть ответ.*

Если интеграл от обычной производной $\partial_j f(x)$ по единичной сфере равен нулю, то получается

$$-\langle f, \partial_j \varphi\rangle = \int \partial_j f(x)\cdot\varphi(x)\, dx + \varphi(0)\int_{r=h} f(x)\omega_j,$$

где первый интеграл надо понимать в смысле главного значения по Коши; при этом второй интеграл не обязательно равен нулю. Задача. Подсчитайте при $n = 2$ производную по x_2 в смысле обобщенных функций от $x_1/|x|^2$.

Теперь вычислению лапласиана, например, от $\ln r$ при $n = 2$ можно придать следующий вид. Вычисляем обычные первые производные, это локально интегрируемые однородные функции

$$\frac{x_j}{r^2} \quad (j = 1,\ 2).$$

Вычисляем от них производные в смысле обобщенных функций по x_j и складываем; так как $\ln r$ – гармоническая функция вне начала, то интеграл по шару исчезает, и мы получаем

$$\Delta \ln r = \delta(x) \int_{r=h} \frac{x_1\, dx_2 - x_2\, dx_1}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Как легко подсчитать, например, при $h = 1$, последний интеграл равен 2π, так что

$$\Delta \ln r = 2\pi\delta(x).$$

Задача. Проведите аналогичный подсчет лапласиана от $1/r$ при $n = 3$.

IV. СОБОЛЕВСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Мы рассмотрим простейшие соболевские пространства $H^s = W_2^s$ в $\mathbb{R}^n$, в полупространстве, в ограниченной области и на замкнутом многообразии.

1. Пространства $H^s(\mathbb{R}^n)$.

1.1. Исходным будем считать следующее *определение*. Пусть s – вещественное число. Пространство $H^s = H^s(\mathbb{R}^n)$ состоит из таких обобщенных функций $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, что преобразование Фурье $\widetilde{u} = Fu$ в смысле обобщенных функций – обычная функция $\widetilde{u}(\xi)$ и величина

$$\|u\|_s^2 = \|u\|_{s,R^n}^2 = \int (1 + |\xi|^2)^s |\widetilde{u}(\xi)|^2 d\xi \tag{1}$$

конечна. Эта величина принимается за квадрат нормы в $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Очевидно, что получается линейное нормированное пространство. Его образ Фурье – это весовое пространство типа L_2 с весом $(1 + |\xi|^2)^s$, или, что то же, обычное пространство L_2 в $\mathbb{R}^n$ относительно меры, которая на любом измеримом множестве M определяется равенством

$$\operatorname{mes} M = \int_M (1 + |\xi|^2)^s d\xi. \tag{2}$$

Такое пространство полно, поэтому H^s – банахово пространство. Более того, это *гильбертово пространство* со скалярным произведением

$$(u, v)_s = (u, v)_{s,R^n} = \int (1 + |\xi|^2)^s \widetilde{u}(\xi)\overline{\widetilde{v}(\xi)}\, d\xi. \tag{3}$$

Очевидно, что $\|u\|_s \le \|u\|_{s'}$ при $s < s'$, так что пространство с бóльшим индексом непрерывно вложено в пространство с меньшим индексом. Пространство H^0 очевидным образом совпадает с $L_2(\mathbb{R}^n)$. Поэтому *все пространства H^s с неотрицательным s состоят из обычных квадратично интегрируемых функций.* Дельта-функция $\delta(x)$, как легко понять, принадлежит H^s при $s < -n/2$.

Далее, у функций из H^1 производные первого порядка в смысле обобщенных функций принадлежат L_2. Мы можем дать второе определение пространства H^1: это такие функции $u(x)$ из $L_2(\mathbb{R}^n)$, что все их первые производные $D_j u(x)$ в смысле обобщенных функций принадлежат $L_2(\mathbb{R}^n)$; при этом

$$\|u\|_1^2 = \int \left[|u(x)|^2 + \sum_1^n |D_j u(x)|^2 \right] dx. \tag{4}$$

Совпадение этой формулы с (1) при $s = 1$ с точностью до числового множителя следует из равенства Парсеваля.

Более общий факт состоит в следующем.

Теорема 1. *При натуральном m пространство $H^m(\mathbb{R}^n)$ состоит из таких квадратично интегрируемых функций, что их производные до порядка m включительно – квадратично интегрируемые функции. При этом норму в $H^m(\mathbb{R}^n)$ можно определить равенством*

$$\|u\|'^2_{m,R^n} = \int \sum_{|\alpha| \le m} |D^\alpha u(x)|^2 \, dx. \tag{5}$$

По существу это определение С.Л. Соболева (который рассматривал только целые неотрицательные s). Эквивалентность норм $\|u\|_m$ и $\|u\|'_m$ при натуральном m следует из очевидного неравенства

$$0 < C_1 \le \frac{\sum_{|\alpha| \le m} |\xi^\alpha|^2}{(1 + |\xi|^2)^m} \le C_2. \tag{6}$$

Из этого неравенства следует также, что *любой оператор в частных производных с постоянными коэффициентами порядка m действует ограниченным образом из H^s в H^{s-m} при любом s.* Немного дальше мы обобщим это утверждение на операторы с "достаточно хорошими" переменными коэффициентами.

1.2. Из уже сказанного видно, что элементы пространства H^s тем "лучше", чем чем выше s. Еще более отчетливо это видно из следующей *теоремы вложения*, доказанной С.Л. Соболевым для натуральных s:

Теорема 2. *Пусть s вещественно и $s > n/2$. Тогда любая функция из $H^s(\mathbb{R}^n)$ равномерно непрерывна и ограничена после возможного исправления на множестве нулевой лебеговой меры. При этом справедливо неравенство*

$$\sup |u(x)| \le C \|u\|_s, \tag{7}$$

означающее, что пространство H^s непрерывно вложено в *пространство* $C_b(\mathbb{R}^n)$ непрерывных ограниченных функций с нормой $\sup|u(x)|$.

Доказательство. При сделанных предположениях преобразование Фурье $\widetilde{v}(\xi)$ функции $u(x)$ – суммируемая функция: в силу неравенства Шварца

$$\int|\widetilde{u}(\xi)|\,d\xi \le \left(\int(1+|\xi|^2)^s|\widetilde{u}(\xi)|^2d\xi\right)^{1/2}\left(\int(1+|\xi|^2)^{-s}d\xi\right)^{1/2} = C\|u\|_s. \quad (8)$$

Поэтому почти всюду

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\cdot\xi}\widetilde{u}(\xi)\,d\xi. \quad (9)$$

Действительно, $u(x)$ восстанавливается по своему преобразованию Фурье формулой

$$\langle u,\varphi\rangle = \langle\widetilde{u}(\xi), F^{-1}[\varphi]\rangle = \int\widetilde{u}(\xi)\frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\cdot\xi}\varphi(x)\,dx\,d\xi,$$

и если справа поменять местами интегралы по теореме Фубини, то видно, что функция $u(x)$ должна совпадать с правой частью в (9) почти всюду. Теперь можно воспользоваться фактом из анализа: (обратное) преобразование Фурье от суммируемой функции – непрерывная ограниченная функция. Это, впрочем, легко проверяется. Более того, из (8) следует (7). Для проверки непрерывности $u(x)$ пишем

$$|u(x)-u(y)| \le \int|e^{i(x-y)\cdot\xi}-1||\widetilde{u}(\xi)|\,d\xi$$

и разбиваем интеграл на интеграл по шару $O_R(0)$ и по его дополнению. При заданном $\varepsilon>0$ интеграл по дополнению меньше $\varepsilon/2$, если R достаточно велико. При фиксированном R интеграл по шару меньше $\varepsilon/2$, если $|x-y|$ достаточно мал. □

Задача 1. Дополнительно покажите, используя аппроксимацию функции $\widetilde{u}(\xi)$ финитной гладкой функцией, что $u(x)\to 0$ при $x\to\infty$.

Задача 2. Проверьте, что $u(x)$ удовлетворяет равномерному условию Гёльдера порядка σ, если $0<\sigma<s-n/2$:

$$|u(x)-u(y)| \le C_\sigma|x-y|^\sigma.$$

Указание:

$$\frac{|e^{ix\cdot\xi}-e^{iy\cdot\xi}|^2}{(1+|\xi|^2)^\sigma} \le \max_{t\ge0}\frac{\min\{|x-y|^2t^2,4\}}{(1+t^2)^\sigma} \le C'|x-y|^{2\sigma}.$$

Доказанная теорема легко обобщается следующим образом.

Теорема 3. *Пусть $s\ge k+\frac{n}{2}$, где k – целое неотрицательное число. Тогда любая функция из $H^s(\mathbb{R}^n)$ равномерно непрерывна и ограничена вместе со*

своими производными до порядка k включительно. При этом справедливо неравенство

$$\sup |D^\alpha u(x)| \le C_k \|u\|_s \quad \textit{при} \quad |\alpha| \le k, \tag{10}$$

где постоянная не зависит от x и α.

Добавим, что если u принадлежит пересечению всех пространств H^s, то это фактически бесконечно гладкая функция с ограниченными производными всех порядков.

1.3. Теперь выясним, как устроены соболевские пространства отрицательных порядков.

Теорема 4. *При целом положительном m пространство H^{-m} состоит из конечных сумм производных до порядка m в смысле обобщенных функций от функций из $L_2(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Мы уже отмечали, что дифференцирование порядка m переводит функции из $L_2(\mathbb{R}^n)$ в функции из $H^{-m}(\mathbb{R}^n)$. Пусть теперь $u \in H^{-m}(\mathbb{R}^n)$ и $\widetilde{u}(\xi) = Fu$. Тогда

$$w(\xi) = (1 + |\xi_1|^m + \cdots + |\xi_n|^m)^{-1} \widetilde{u}(\xi) \in L_2(\mathbb{R}^n),$$

так как

$$0 \le C_1 \le \frac{1 + |\xi_1|^m + \cdots + |\xi_n|^m}{(1 + |\xi|^2)^{m/2}} \le C_2.$$

Поэтому

$$\widetilde{u}(\xi) = w(\xi) + \xi_1^m w_1(\xi) + \cdots + \xi_n^m w_m(\xi), \quad \text{где} \quad w_j(\xi) = \frac{|\xi|^m}{\xi^m} w(\xi) \in L_2(\mathbb{R}^n).$$

Значит,

$$u = u_0 + D_1^m u_1 + \cdots + D_n^m u_n,$$

где все функции u_j принадлежат $L_2(\mathbb{R}^n)$. $\square$

ЛЕКЦИЯ 11.

Из последней теоремы следует, в частности, что *объединение пространств $H^s(\mathbb{R}^n)$ содержит все обобщенные функции с компактными носителями.* Действительно, мы доказали раньше, что такие обобщенные функции – конечные суммы производных в смысле обобщенных функций от непрерывных функций с компактными носителями.

1.4. Следующее предложение – миниатюрная модель для некоторых из будущих теорем теории эллиптических операторов.

Теорема 5. *Оператор $-1+\Delta$ изоморфно и изометрически отображает пространство $H^s(\mathbb{R}^n)$ на пространство $H^{s-2}(\mathbb{R}^n)$ при любом s.*

Это сразу видно из нашего определения соболевских пространств, так как в образах Фурье наш оператор действует как умножение на $1+|\xi|^2$. Соболевские пространства очень удобны для рассмотрения этого оператора. Дальше мы увидим, что они удобны для построения общей теории эллиптических операторов.

Вот ближайшее и очевидное обобщение:

Теорема 6. *Пусть s и t – любые вещественные числа. Тогда оператор*

$$\Lambda_t = F^{-1}(1+|\xi|^2)^{t/2}F \tag{1}$$

изоморфно и изометрически отображает пространство $H^s(\mathbb{R}^n)$ на пространство $H^{s-t}(\mathbb{R}^n)$.

Как мы увидим, оператор (1) – это пример эллиптического псевдодифференциального оператора порядка t. Это t-я степень оператора $1-\Delta$.

1.5. Пространство $\mathcal{S}$ содержится, конечно, во всех пространствах H^s.

Теорема 7. *При любом s пространство H^s совпадает с пополнением пространства $\mathcal{S}$ по норме $\|\cdot\|_s$.*

Доказательство. Пусть $u \in H^s$. Тогда функция $(1+|\xi|^2)^{s/2}\widetilde{u}(\xi)$ принадлежит $L_2(\mathbb{R}^n)$ и может быть приближена в $L_2(\mathbb{R}^n)$ финитными бесконечно гладкими функциями $v_k(\xi)$. Запишем v_k в виде

$$v_k(\xi) = (1+|\xi|^2)^{s/2}w_k(\xi), \text{ где } w_k(\xi) = \frac{v_k(\xi)}{(1+|\xi|^2)^{s/2}}.$$

Конечно, $w_k(\xi)$ – тоже финитные бесконечно гладкие функции, и они сходятся к $\widetilde{u}(\xi)$ в пространстве L_2 с весом $(1+|\xi|^2)^s$. Их прообразы Фурье заведомо принадлежат $\mathcal{S}$ и сходятся к u в H^s. $\square$

Усилим последний результат.

Теорема 8. *При любом s пространство H^s является пополнением пространства $\mathcal{D}$ по норме пространства H^s.*

Доказательство. Достаточно показать, что любую функцию $u(x)$ из $\mathcal{S}$ можно аппроксимировать финитными бесконечно гладкими функциями по

норме пространства H^s. Более того, достаточно сделать это при целом неотрицательном s. Пусть $\varphi(x)$ – функция из $\mathcal{D}$, равная 1 при $|x| \le 1$. Положим

$$u_\varepsilon(x) = u(x)\varphi(\varepsilon x).$$

Тогда при любом α

$$D^\alpha[u_\varepsilon(x) - u(x)] = D^\alpha u(x) \cdot [\varphi(\varepsilon x) - 1] + \sum c_{\beta\gamma} D^\beta u(x) \cdot D^\gamma \varphi(\varepsilon x), \qquad (2)$$

где $\alpha = \beta + \gamma$ и $\gamma \neq 0$. Так как

$$D^\gamma \varphi(\varepsilon x) = \varepsilon^{|\gamma|}(D^\gamma \varphi)(\varepsilon x),$$

то ясно, что правая часть в (2) стремится к 0 в $L^2(\mathbb{R}^n)$ при $\varepsilon \to 0$. $\square$.

Следствие 1. *При $s' > s$ пространство $H^{s'}(\mathbb{R}^n)$ плотно в $H^s(\mathbb{R}^n)$.*

Следствие 2. *При любом s пространство $H^s(\mathbb{R}^n)$ можно определить как пополнение линеала $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ по норме в этом пространстве.*

Это относится и к норме при дробном $s > 0$, которую мы сейчас будем обсуждать.

1.6. Как мы видели, при натуральных s в H^s есть норма, которая записывается без преобразования Фурье. Сейчас мы укажем такую норму для дробных положительных s.

Теорема 9. *Пусть $s = k + \theta$, где k – натуральное число и $0 < \theta < 1$. Тогда норма в H^s эквивалентна норме, определяемой равенством*

$$\|u\|_s^{'2} = \|u\|_k^2 + \sum_{|\alpha|=k} \iint \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\theta}}\, dx\, dy. \qquad (3)$$

Доказательство. Рассмотрим случай $k = 0$ и вычислим интеграл

$$\iint \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\theta}}\, dx\, dy \qquad (4)$$

через преобразование Фурье $\widetilde{u}(\xi)$ функции $u(x)$, считая ее финитной и бесконечно гладкой. Результат, который мы получим, указан ниже в формуле (7). Этот интеграл сходится, так как на компакте $\operatorname{supp} u(x) \times \operatorname{supp} u(y)$ особенность при $x = y$ интегрируема, а вне этого множества интегрируемы $|u(x)|^2|x-y|^{-n-2\theta}$ и $|u(y)|^2|x-y|^{-n-2\theta}$. Он допускает поэтому запись

$$\int \frac{1}{|z|^{n+2\theta}}\, dz \int |u(x+z) - u(x)|^2 dx. \qquad (5)$$

Внутренний интеграл в силу равенства Парсеваля с точностью до постоянного множителя равен

$$\int |e^{iz\cdot\xi} - 1|^2 |\widetilde{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

Здесь

$$|e^{iz\cdot\xi}-1|^2=[\cos(z\cdot\xi)-1]^2+\sin^2(z\cdot\xi)=2-2\cos(z\cdot\xi)=4\sin^2[(z\cdot\xi)/2].$$

Обозначим через ϑ угол между векторами z и ξ. Меняя порядок интегрирования по теореме Фубини, рассмотрим теперь интеграл

$$\int|\widetilde{u}(\xi)|^2d\xi\int\frac{\sin^2[(z\cdot\xi)/2]}{|z|^{n+2\theta}}\,dz. \tag{6}$$

Здесь внутренний интеграл равен

$$\int\sin^2\left(\tfrac{1}{2}|z||\xi|\cos\vartheta\right)\frac{dz}{|z|^{n+2\theta}}.$$

Перейдем здесь к сферическим координатам: $z=r\omega$, $dz=r^{n-1}dr\,dS$. После этого сделаем замену $\frac{1}{2}|\xi|r\cos\vartheta=\tau$. Получим с точностью до постоянного множителя

$$|\xi|^{2\theta}\int_S\cos^{2\theta}\vartheta\,dS\int_0^\infty\frac{\sin^2\tau}{\tau^{1+2\theta}}d\tau=C_\theta|\xi|^{2\theta}.$$

Мы показали, что

$$\iint\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\theta}}\,dx\,dy=C_\theta\int|\xi|^{2\theta}|\widetilde{u}(\xi)|^2d\xi. \tag{7}$$

Этот результат предельным переходом распространяется на $u\in H^\theta$. Этим теорема фактически доказана для $k=1$. На ненулевые k она распространяется автоматически. □

1.7. Рассмотрим вопрос о реализации пространства, сопряженного к пространству H^s, т.е. пространства линейных непрерывных функционалов над H^s. Таких реализаций имеется две.

Первая состоит в том, что поскольку H^s – гильбертово пространство со скалярным произведением $(u,v)_s$, *общий вид линейного непрерывного функционала* $f(u)$ *над* H^s *есть*

$$f(u)=(u,v)_s, \tag{8}$$

где v *– любой фиксированный элемент из* H^s*, он однозначно определяется по* f.

Вторая состоит в использовании *двойственности между* H^s *и* H^{-s}. Дело в том, что *форма* $(u,v)_0$ *на* H^0 *продолжается на прямое произведение* $H^s\times H^{-s}$ *по формуле*

$$(u,v)_0=\int\widetilde{u}(\xi)\cdot\overline{\widetilde{v}(\xi)}\,d\xi \tag{9}$$

и при этом так продолженная форма удовлетворяет обобщенному неравенству Шварца

$$|(u,v)_0|\le\|u\|_s\|v\|_{-s}. \tag{10}$$

Последнее получается применением к

$$\int \widetilde{u}(\xi)\cdot\overline{\widetilde{v}(\xi)}\,d\xi = \int (1+|\xi|^2)^{s/2}\widetilde{u}(\xi)\cdot(1+|\xi|^2)^{-s/2}\overline{\widetilde{v}(\xi)}\,d\xi$$

обычного неравенства Шварца.

Теорема 10. *При любом s любой линейный непрерывный функционал $f(u)$ над H^s может быть представлен в виде*

$$f(u) = (u,v)_0, \tag{11}$$

где v – элемент из H^{-s}, однозначно определяемый по f. И обратно, при любом $v\in H^{-s}$ выражение (11) *есть линейный непрерывный функционал над H^s.*

Доказательство. Второе утверждение очевидно. Чтобы доказать первое, положим $u_1 = \Lambda_s u$ (см. формулу (1)). Тогда $u_1\in H^0$ и $g(u_1) = f(u)$ – линейный непрерывный функционал над H^0. Следовательно,

$$f(u) = \int \widetilde{u}_1(\xi)\overline{\widetilde{v}_1(\xi)}\,d\xi = \int (1+|\xi|^2)^{s/2}\widetilde{u}(\xi)\overline{\widetilde{v}_1(\xi)}\,d\xi,$$

где $v_1\in H^0$. Отсюда видно, что

$$f(u) = (u,v)_0 \text{ где } v = \Lambda_s v_1 \in H^{-s}. \quad \square.$$

1.8. Теперь мы обсудим условия, при которых оператор умножения на функцию $a(x)$ ограничен в $H^s(\mathbb{R}^n)$. Для $s=0$ это известно: *в $L_2(\mathbb{R}^n)$ ограничен оператор умножения на ограниченную измеримую функцию.* Ее, конечно, достаточно считать ограниченной в существенном, т.е. ограниченной вне множества нулевой меры. Из сказанного сразу получается (с использованием формулы Лейбница для производной произведения)

Теорема 11. *Пусть m – натуральное число и функция $a(x)$ непрерывна и ограничена с производными до порядка $m-1$ включительно, а ее производные порядка m существуют и ограничены, по крайней мере, вне множества нулевой меры. Тогда оператор умножения на $a(x)$ ограничен в $H^m(\mathbb{R}^n)$.*

В частности, достаточно, чтобы функция $a(x)$ была непрерывна и ограничена с производными до порядка m включительно. Теперь рассмотрим дробные s.

Теорема 12. *Пусть m – целое число и $s = m+\theta$, $0<\theta<1$. Пусть функция $a(x)$ имеет непрерывные и ограниченные производные до порядка m включительно, а ее производные порядка m удовлетворяют равномерному условию Гёльдера с показателем $\vartheta\in(\theta,1]$. Тогда оператор умножения на $a(x)$ ограничен в $H^s(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство проведем для $m=0$. Предполагая, что $u(x)\in H^\theta$, надо оценить величину

$$\iint \frac{|a(x)u(x)-a(y)u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\theta}}\,dx\,dy \tag{12}$$

через $\|u\|^2_\theta$. Ясно, что

$$|a(x)u(x) - a(y)u(y)|^2 \le 2|a(x)[u(x) - u(y)]|^2 + 2|[a(x) - a(y)]u(y)|^2.$$

Поэтому величина (12) не превосходит

$$2\sup|a(x)|^2\|u\|^2_\theta + \int |u(y)|^2 I(y)\,dy,$$

где

$$I(y) = \int \frac{|a(x) - a(y)|^2}{|x-y|^{n+2\theta}}\,dx, \tag{13}$$

и дело сводится к проверке равномерной ограниченности этого интеграла. В силу нашего предположения о функции $a(x)$ подинтегральное выражение не превосходит $\mathrm{Const}\,|x-y|^{-n+2(\vartheta-\theta)}$ вблизи нуля и $\mathrm{Const}\,|x-y|^{-n-2\theta}$ на бесконечности, интеграл от этого выражения сходится и мажорируется постоянной, не зависящей от x, так что нужная равномерная ограниченность очевидна. □

Замечание 1. Как видно из доказательства, относительно производных $D^\alpha a(x)$ старшего порядка $|\alpha| = m$ достаточно предположить, что интегралы

$$J_\alpha(x) = \int \frac{|D^\alpha a(x) - D^\alpha a(y)|^2}{|x-y|^{n+2\theta}}\,dy \tag{14}$$

сходятся и равномерно ограничены, по крайней мере, вне множества нулевой меры.

Замечание 2. В этих лекциях не было возможности затронуть вопросы интерполяции. На самом деле соболевские пространства в $\mathbb{R}^n$ образуют "интерполяционную шкалу". Из этого, в частности, следует, что так как оператор умножения на функцию $a(x)$ с ограниченными и непрерывными производными до порядка m включительно ограничен в H^{m-1} и H^m, то он ограничен в H^s при промежуточных s, т.е. при $m-1 < s < m$.

Рассмотрим теперь вопрос об ограниченности оператора умножения на $a(x)$ в H^s с *отрицательным* s. Здесь прежде всего возникает вопрос об определении. Следующая точка зрения приемлема. Пусть $u \in H^s$ и $\{u_n\}$ – последовательность из $\mathcal{D}$, сходящаяся к u в H^s. Тогда $au = \lim_{n\to\infty} au_n$, если этот предел существует в H^s и не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности $\{u_n\}$. Будем считать это *определением* оператора умножения на $a(x)$ в H^s при отрицательном s. Другая возможность – рассмотреть свертку в образах Фурье, мы не будем тратить на это время. Теперь заметим, что при $v \in H^{-s}$, $-s = |s|$, если оператор умножения на $a(x)$ ограничен в H^{-s},

$$(au_n, v)_0 = (u_n, av)_0 \to (u, \overline{a}v)_0. \tag{15}$$

Отсюда видна третья возможность, эквивалентная первой: оператор умножения на $a(x)$ в H^s, $s < 0$, *определяется* в этом случае соотношением

$$(au, v)_0 = (u, \overline{a}v)_0 \ \text{ при } \ v \in H^{-s}. \tag{16}$$

Очевидно, что операторы умножения на $a(x)$ и на $\overline{a(x)}$ одновременно ограничены в H^{-s} или нет. Получаем следующий вполне удобный результат:

Теорема 13. *Пусть s отрицательно и оператор умножения на $a(x)$ ограничен в $H^{|s|}$. Тогда он определятся в H^s соотношением* (16) *и ограничен в этом пространстве.*

Приведем еще такое пояснение. Мы знаем, что H^s и H^{-s} – сопряженные пространства. На финитных гладких функциях, конечно, $(au, v)_0 = (u, \overline{a}v)_0$, поэтому сопряженным к оператору умножения на a в H^s должен быть оператор умножения на $\overline{a}$. Оператор в данном пространстве ограничен тогда и только тогда, когда сопряженный оператор ограничен в сопряженном пространстве. Отсюда видно, что условие ограниченности оператора умножения на a в $H^{|s|}$ в формулировке последней теоремы необходимо.

Рассмотрим теперь линейный оператор в частных производных с переменными коэффициентами

$$a(x, D) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) D^\alpha. \tag{17}$$

Если все $a_\alpha(x)$ – ограниченные измеримые функции, то это ограниченный оператор из $H^m(\mathbb{R}^n)$ в $H^0(\mathbb{R}^n) = L_2(\mathbb{R}^n)$.

В качестве некоторой подготовки к рассмотрению псевдодифференциальных операторов сформулируем

Следствие. *Оператор* (8) *с коэффициентами, имеющими непрерывные и ограниченные производные всех порядков, действует ограниченным образом из H^s в H^{s-m} при любом s.*

ЛЕКЦИЯ 12.

1.9. Рассмотрим вопрос о следе функции из $H^s(\mathbb{R}^n)$ на гиперплоскости $\mathbb{R}^{n-1}$, определяемой для удобства равенством $x_n = 0$. Положим $x = (x', x_n)$. Через F' обозначим преобразование Фурье функций от x' в функции от ξ'.

Теорема 14. *Пусть $s > 1/2$. Тогда для функций $u \in \mathcal{D}$ справедливо неравенство*

$$\|u(x', 0)\|_{s-1/2, R^{n-1}} \le C \|u(x)\|_{s, R^n}, \tag{1}$$

где C – не зависящая от u постоянная.

Доказательство. Представим $F'[u](\xi', x_n)\big|_{x_n=0}$ в виде

$$F'[u](\xi', 0) = (2\pi)^{-1} \int F[u](\xi)\, d\xi_n.$$

Отсюда в силу неравенства Шварца

$$|F'[u](\xi', 0)|^2 \le (2\pi)^{-2} \int |F[u]|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi_n \int (1 + |\xi|^2)^{-s} d\xi_n.$$

Последний интеграл легко вычисляется подстановкой $\xi_n/(1 + |\xi|^2)^{1/2} = \tau$; с точностью до постоянного множителя он равен $(1 + |\xi'|^2)^{-s+1/2}$. Остается разделить на него обе части и проинтегрировать их по ξ'. $\square$

Эта теорема позволяет дать следующее определение следа функции u из H^s на R^{n-1} при $s > 1/2$.

Определение. Пусть $\{u_l\}$ – последовательность функций из $\mathcal{D}$, сходящаяся к u в H^s. Тогда она фундаментальна, и из (1) вытекает, что их следы на R^{n-1} образуют фундаментальную последовательность в $H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$. Ввиду полноты этого пространства там есть предел. Более того, из (1) вытекает, что этот предел не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности, так как любые две такие последовательности неограниченно сближаются в $H^s(\mathbb{R}^n)$. Этот предел и называется *следом* функции u на R^{n-1}, и он обозначается через $u(x', 0)$.

Для обычных непрерывных функций из H^s этот след очевидным образом совпадает с обычным следом. В силу (1) *оператор перехода к следу действует ограниченным образом из $H^s(\mathbb{R}^n)$ в $H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$.*

Теорему 14 доказал Л.Н. Слободецкий (1958). Он же показал на примере, что неравенство (1) теряет силу при $s = 1/2$. Времени на разбор этого примера у нас нет.

Из теоремы 14 следует, что *если $s > m + 1/2$, где m – натуральное число, и $a(D)$ – оператор в частных производных порядка m для простоты с постоянными коэффициентами, то для функций $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ выражение $a(D)u$ имеет след на $\mathbb{R}^{n-1}$, принадлежащий $H^{s-m-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$, причем оператор перехода к этому следу ограничен в соответствующих нормах.*

Позднее мы определим соболевские пространства в полупространстве, в частности, в $\mathbb{R}^n_+ = \{x : x_n > 0\}$. Для функций из этих соболевских пространств можно будет говорить об их граничных значениях на граничной гиперплоскости $\mathbb{R}^{n-1}$.

1.10. Здесь мы рассмотрим усреднения функции из H^s.

Пусть $\omega(x) \in \mathcal{D}$. Если $u \in H^s$ при некотором s, то, конечно, $u \in \mathcal{D}'$, так что определена свертка $u * \omega$, по крайней мере, в смысле обобщенных функций. В лекции 7 у нас доказано, что это бесконечно гладкая функция и

$$\operatorname{supp}(u * \omega) \subset \operatorname{supp} u + \operatorname{supp} \omega. \tag{2}$$

Предложение 1. *При* $u \in H^s$, $\omega \in \mathcal{D}$

$$F[u * \omega] = F[u]F[\omega]. \tag{3}$$

Доказательство. Такое соотношение доказано у нас, если $u \in \mathcal{S}'$. Утверждать, что $u \in \mathcal{S}$, мы не можем, но мы можем аппроксимировать u в H^s финитными бесконечно гладкими функциями u_n. Для них мы имеем

$$F[u_n * \omega] = F[u_n]F[\omega],$$

и здесь $F[u_n] \to F[u]$ в пространстве L_2 с весом $(1+|\xi|^2)^s$. Так как $F[\omega] \in \mathcal{S}$, то такая сходимость сохраняется после умножения на $F[\omega]$. Отсюда следует, что $u_n * \omega$ сходится в H^s. С другой стороны, можно доказать, что $u_n * \omega \to u * \omega$ в смысле обобщенных функций (ср. п. 9 в лекции 2). Поэтому $u_n * \omega \to u * \omega$ в $H^s(\mathbb{R}^n)$, и в пределе получается нужная формула (3). $\square$

Пусть теперь

$$\omega(x) \geq 0, \quad \omega(x) = 1 \ \text{ вблизи } \ 0, \quad \int \omega(x)\, dx = 1. \tag{4}$$

Положим при $h > 0$

$$\omega_h(x) = h^{-n}\omega\left(\frac{x}{h}\right). \tag{5}$$

Это дельтаобразное семейство при $h \to 0$. Свертку $u * \omega_h$ называют *усреднением* функции (или обобщенной функции) u.

Предложение 2.

$$u * \omega_h \to u \ \text{ в } \ H^s.$$

Доказательство. Как легко проверить, $F[\omega_h](\xi) = F[\omega](h\xi)$, и здесь правая часть – равномерно по h ограниченная функция, равномерно сходящаяся к $F[\omega](0) = 1$ в любом шаре $O_R = O_R(0)$. Поэтому $F[u]F[\omega_h] \to F[u]$ в пространстве L_2 с весом $(1 + |\xi|^2)^s$. Остается воспользоваться предложением 1. $\square$

1.11. Здесь мы докажем теорему о компактности, которая позднее даст очень важные следствия для соболевских пространств в ограниченных областях и на компактных многообразиях.

Теорема 15. *Пусть $s < s'$ и X – ограниченное множество в $H^{s'}$, причем носители всех элементов из X лежат в фиксированном компакте K пространства R^n. Тогда X предкомпактно в H^s, т.е. каждая последовательность $\{u_l\}$ элементов из X содержит подпоследовательность, сходящуюся в H^s.*

Доказательство. Так как каждую функцию u_l можно аппроксимировать ее усреднением с любой степенью точности, то предположим, не ограничивая общности, что $u_l \in \mathcal{D}$. При этом u_l имеют ограниченные нормы в $H^{s'}$ и носители, лежащие в фиксированном компакте K' (см. (2)). Пусть $v_l(\xi) = F[u_l]$.

Покажем, что в любом фиксированном шаре O_R эти функции равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. Для этого возьмем функцию $\varphi \in \mathcal{D}$, равную 1 в окрестности компакта K'. Тогда $u_l(x) = u_l(x)\varphi(x)$ и поэтому

$$v_l(\xi) = \int v_l(\eta)\psi(\xi - \eta)\, d\eta,$$

где $\psi = F[\varphi]$. Отсюда в силу неравенства Шварца

$$|v_l(\xi)|^2 \le \|u_l\|^2_{s'} \int (1 + |\eta|^2)^{-s'} |\psi(\xi - \eta)|^2 d\eta$$

и

$$|v_l(\xi) - v_l(\widetilde{\xi})|^2 \le \|u\|^2_{s'} \int (1 + |\eta|^2)^{-s'} |\psi(\xi - \eta) - \psi(\widetilde{\xi} - \eta)|^2 d\eta.$$

Теперь пользуемся быстрой сходимостью $\psi(\eta)$ к нулю при $\eta \to \infty$ и равномерной непрерывностью этой функции на любом компакте. Отсюда и видна равномерная ограниченность и равностепенная непрерывность функций v_l в любом O_R.

Далее,

$$\|u_l - u_m\|^2_s = \int_{O_R} (1 + |\xi|^2)^s |v_l(\xi) - v_m(\xi)|^2 +$$
$$\int_{R^n \setminus O_R} (1 + |\xi|^2)^{s-s'} (1 + |\xi|^2)^{s'} \left[|v_l(\xi)|^2 + |v_m(\xi)|^2\right] d\xi.$$

При заданном $\varepsilon > 0$ мы можем выбрать настолько большое R, что второй интеграл будет меньше $\varepsilon/2$ для всех l, m. Затем, пользуясь теоремой Арцела в применеинии к семейству функций v_l на шаре $\overline{O_R}$, мы можем указать такое N, что первый интеграл будет меньше $\varepsilon/2$ при некоторых $l, m > N$.

Отсюда ясно, что последовательность $\{u_l\}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся в H^s. □

2. Пространства Соболева на замкнутом многообразии. Пусть M – n-мерное бесконечно гладкое многообразие. Мы ограничимся случаем, когда M *замкнуто*, т. е. компактно и не имеет края. Каждая его точка имеет

на нем координатную окрестность, т.е. окрестность, в которой можно ввести локальные координаты, причем в пересечениях двух таких окрестностей переход от одних локальных координат к другим является невырожденным бесконечно гладким преобразованием. Ввиду компактности многообразие допускает покрытие конечным набором координатных окрестностей. Функция $u(x)$ на M называется *бесконечно гладкой*, если после перехода к локальным координатам получается бесконечно гладкая функция от этих координат. Отметим, что на M существует конечное разбиение единицы

$$\sum_1^N \varphi_j(x) = 1, \tag{6}$$

состоящее из бесконечно гладких неотрицательных функций, носитель каждой из которых лежит в какой-нибудь координатной окрестности.

Соболевскую норму $\|u\|_s = \|u\|_{s,M}$ определим равенством

$$\|u\|^2_{s,M} = \sum_1^N \|u\varphi_j\|^2_{s,R^n}, \tag{7}$$

где функции φ_j образуют разбиение единицы и произведения $u\varphi_j$ рассматриваются как *перенесенные на* $\mathbb{R}^n$. Это означает, что после перехода к локальным координатам функция продолжается на $\mathbb{R}^n$ нулем вне ее носителя. Норма (7) зависит, конечно, от выбора разбиения единицы и локальных координат, но можно проверить, что *разные нормы эквивалентны*, т.е. их отношение заключено между положительными постоянными. *Пространство* $H^s(M)$ мы определим как пополнение пространства $C^\infty(M)$ по этой норме.

Заметим, что норме (7) отвечает скалярное произведение

$$(u,v)_{s,M} = \sum_1^N (\varphi_j^2 u, v)_{s,R^n}. \tag{8}$$

Поэтому H^s – *гильбертово пространство.*

Мы теперь перечислим свойства этих пространств. Соответствующие утверждения как правило легко выводятся из определения и из аналогичных утверждений для $\mathbb{R}^n$, так что пояснения будут короткими.

1. Если $u \in H^s(M)$ и φ – функция из $C^\infty(M)$ с носителем, лежащим в координатной окрестности, то перенесение функции φu на $\mathbb{R}^n$ принадлежит $H^s(\mathbb{R}^n)$.

2. *Пространство* $H^0(M)$ *совпадает с пространством квадратично интегрируемых функций* $L_2(M)$. (Скалярное произведение в $L_2(M)$ определяем формулой (8) и вдаваться в обсуждение других вариантов его определения не будем. Один из вариантов состоит в том, что многообразие рассматривается как вложенное в $\mathbb{R}^N$, $N > n$, и на M берется мера, индуцированная из $\mathbb{R}^N$.) *При* $s' > s$ *имеет место вложение пространства* $H^{s'}(M)$ *в* $H^s(M)$, *оператор вложения непрерывен и, более того, вполне непрерывен.* Последний

факт очень важен, он следует из теоремы 15. *Пространство* $H^{s'}(M)$ *плотно в* $H^s(M)$ *при* $s' > s$. Пространство $C^\infty(M)$ плотно во всех $H^s(M)$.

3. При $s > n/2$ функция из $H^s(M)$ непрерывна после подходящего изменения на множестве нулевой меры (и даже локально удовлетворяет условию Гёльдера порядка θ в локальных координатах, если $0 < \theta < n/2 - s$, $\theta \leq 1$. Более того, *пространство* $H^s(M)$ *непрерывно вложено в пространство* $C^0(M)$ *непрерывных функций с нормой* $\max|u|$.

При $s > m + n/2$ с натуральным m функции из $H^s(M)$ локально непрерывно дифференцируемы до порядка m после возможного изменения на множестве нулевой меры. Несложно определить пространство $C^m(M)$, используя разбиение единицы, и проверить непрерывность вложения $H^s(M)$ в $C^m(M)$. Пересечение всех пространств $H^s(M)$ по существу совпадает с $C^\infty(M)$.

4. Используя разбиение единицы, локальные координаты и форму

$$\langle u, v\rangle = (u, \overline{v})_{0,M}, \tag{9}$$

можно ввести *обобщенные функции на* M – линейные непрерывные функционалы над пространством $\mathcal{E}(M) = C^\infty(M)$. Мы эту возможность раньше не обсуждали.

Пространство $H^{-m}(M)$ с натуральным m состоит из таких обобщенных функций из $\mathcal{E}'(M)$, что локально, в локальных координатах, они являются производными в смысле обобщенных функций до порядка m от функций из $L_2(M)$.

Отсюда на самом деле следует, что объединение всех соболевских пространств на $H^s(M)$ содержит все обобщенные функции на M.

5. *Пространство линейных непрерывных функционалов над* H^s *можно отождествить*: 1) *с* $H^s(M)$, *используя форму* $(u, v)_{s,M}$; 2) *с* $H^{-s}(M)$, *используя продолжение формы* $(u, v)_{0,M}$ *на* $H^s(M) \times H^{-s}(M)$.

Здесь легко проверяются первое утверждение и *обобщенное неравенство Шварца*

$$|(u, v)_{0,M}| \leq C\|u\|_{s,M}\|v\|_{-s,M}. \tag{10}$$

В силу этого неравенства форма $(u, v)_{0,M}$ продолжается до ограниченной формы на $H^s(M) \times H^{-s}(M)$ и при фиксированном $v \in H^{-s}(M)$ определяет линейный непрерывный функционал над $H^s(M)$. Однако для доказательства того, что это общий вид линейного непрерывного функционала на $H^s(M)$, нужно при любых t, σ иметь линейный оператор $\Lambda_{t,\sigma}$, непрерывно отображающий $H^\sigma(M)$ на $H^{\sigma-t}(M)$ и обратимый. Такой оператор, не зависящий от σ, легко строится в теории эллиптических псевдодифференциальных операторов на M.

6. *Оператор умножения на функцию из* $C^k(M)$ *ограничен в* $H^s(M)$ *при* $|s| \leq k$. *Оператор умножения на бесконечно гладкую функцию ограничен во всех* $H^s(M)$.

Эти утверждения легко проверяются; мы не будем их уточнять.

ЛЕКЦИЯ 13.

3. Соболевские пространства в ограниченной области и в полупространстве. Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с бесконечно гладкой $(n-1)$-мерной границей, и пусть s – неотрицательное число. Возможны три определения пространства $H^s(\Omega)$.

Определение 1. Пространство $H^s(\Omega)$ определяется как пополнение пространства $C^\infty(\overline{\Omega})$ при целом $s = m$ по норме, определяемой равенством

$$\|u\|^2_{m,\Omega} = \sum_{|\alpha|\le m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 dx, \tag{1}$$

и при дробном $s = m + \theta$, $0 < \theta < 1$, по норме, определяемой равенством

$$\|u\|^2_{s,\Omega} = \|u\|^2_{m,\Omega} + \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\theta}} dx\, dy. \tag{2}$$

При $\theta = 0$ функции из $C^m(\overline{\Omega})$ лежат в этом пространстве, и вместо $C^\infty(\overline{\Omega})$ достаточно рассматривать пополнение пространства $C^m(\overline{\Omega})$. При $\theta > 0$ достаточно рассмотреть пополнение пространства $C^{m+\theta'}(\overline{\Omega})$ функций с производными порядка m, удовлетворяющими равномерному условию Гёльдера порядка $\theta' \in (\theta, 1]$.

Определение 2. Функция $u(x)$ принадлежит $H^s(\Omega)$, если она является сужением на Ω функции $v(x)$ из $H^s(\mathbb{R}^n)$. При этом норма $\|u\|'_{s,\Omega}$ определяется как нижняя грань норм функций $v(x)$ из $H^s(\mathbb{R}^n)$, сужения которых на Ω совпадают с $u(x)$.

О значениях $u(x)$ на границе можно не беспокоиться, так как все функции рассматриваются с точностью до их значений на множестве нулевой меры.

Определение 3. Пусть $s = m + \theta$, где m – целое неотрицательное число и $0 \le \theta < 1$. Пространство $H^s(\Omega)$ состоит из таких квадратично интегрируемых функций в Ω, что их производные до порядка m включительно в смысле обобщенных функций в $\mathcal{D}'(\Omega)$ – квадратично интегрируемые функции и при $\theta > 0$ конечна величина (2). Норма в этом пространстве определяется формулой (1) при $\theta = 0$ и (2) при $\theta > 0$.

Совершенно такие же определения даются для соболевских пространств $H^s(\mathbb{R}^n_+)$ с неотрицательным s, где $\mathbb{R}^n_+$ – полупространство в $\mathbb{R}^n$, определяемое неравенством $x_n > 0$. Но в этом случае в первом определении берутся функции с компактными носителями в замкнутом полупространстве.

Более общие области в $\mathbb{R}^n$ мы рассматривать не будем.

Теорема 1. *Определения* 1 – 3 *эквивалентны.*

Доказательство наметим сначала для полупространства. Не вызывает сомнений, что при аппроксимации функций из $H^s(\mathbb{R}^n)$ гладкими финитными функциями их сужения на $\mathbb{R}^n_+$ сходятся в норме $\|\cdot\|_{s,R^n_+}$. Поэтому сужения функций из $H^s(\mathbb{R}^n)$ на $\mathbb{R}^n_+$ принадлежат $H^s(\mathbb{R}^n_+)$ в смысле определения 1. Пусть

теперь $u(x)$ – функция из $H^s(\mathbb{R}^n_+)$ в смысле определения 1. Для ее продолжения до функции v из $H^s(\mathbb{R}^n)$ можно использовать следующие формулы, предложенные Хестенсом (Hestenes, 1941) для гладкого продолжения гладких функций:

$$v(x) = u(x) \ \text{ при } \ x_n > 0,$$
$$v(x', x_n) = \sum_1^{l+1} \lambda_\nu u\left(x', -\frac{1}{\nu}x^n\right) \ \text{ при } \ x^n < 0, \tag{3}$$

где числа λ_ν определяются системой уравнений

$$\sum_1^{l+1} \left(-\frac{1}{\nu}\right)^j \lambda_\nu = 1 \quad (j = 0, \ldots, l). \tag{4}$$

Пусть для простоты $\theta = 0$. (В этой лекции в доказательствах мы ограничиваемся этим случаем.) Возьмем $l = m$. Если $u \in C_0^m(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, то проверяется, что после продолжения получается функция v, принадлежащая $C_0^m(\mathbb{R}^n)$ и при этом

$$\|v\|_{m,R^n} \le C_m \|u\|_{m,R^n_+}, \tag{5}$$

где постоянная не зависит от u. Если $\{u_l\}$ – последовательность функций из $C_0^m(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, сходящаяся к данной функции u по норме $\|\cdot\|_{m,\mathbb{R}^n_+}$, то $\{v_l\}$ сходится к некоторой функции $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$, и можно проверить, что формулы (3) сохраняются для v. Таким образом, построен ограниченный *оператор продолжения* функций из $H^m(\mathbb{R}^n_+)$ (в смысле первого определения) до функций из $H^m(\mathbb{R}^n)$. Нормы в определениях 1 и 2 оказываются эквивалентными. Этим показано, что определения 1 и 2 эквивалентны.

Эквивалентность определений 2 и 3 проверяется аналогично. Если функция принадлежит $H^m(\mathbb{R}^n)$, то она квадратично интегрируема по $\mathbb{R}^n$ с производными $D^\alpha u$, $|\alpha| \le m$, и ее сужение на $\mathbb{R}^n_+$ принадлежит $H^m(\mathbb{R}^n_+)$ в смысле определения 3. Обратно, если $u(x)$ принадлежит $H^m(\mathbb{R}^n_+)$ в смысле определения 3, то ее продолжение до функции из $H^m(\mathbb{R}^n)$ строится при помощи того же оператора, что и выше.

Заметим, что правую часть в (3) можно умножить на любую функцию $\psi(x_n)$ из $C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+})$, равную 1 вблизи начала.

В случае ограниченной области Ω рассуждение остается в основном таким же, но оператор продолжения строится следующим образом. Функция $u(x)$ умножается на бесконечно гладкое разбиение единицы

$$\sum_1^N \varphi_\nu = 1 \tag{6}$$

в $\overline{\Omega}$. Здесь носитель функции φ_1 лежит внутри Ω, а носители остальных φ_ν лежат в координатных полуокрестностях, в которых возможно выпрямление границы при помощи бесконечно гладкой невырожденной замены координат. Каждая из функций $u\varphi_\nu$ продолжается через плоскую границу при помощи

описанного выше оператора. Можно позаботиться о том, чтобы продолженные функции можно было сложить и получить функцию на $\mathbb{R}^n$. $\square$

Оператор продолжения, которым мы воспользовались, на самом деле годится при всех $s \le l$ и достаточно гладкой границе. (Не будем останавливаться на уточнениях.) Сили (R.T. Seeley, 1964) построил его модификацию, пригодную сразу при всех s в случае бесконечно гладкой границы. Более сложный оператор продолжения строится и используется при липшицевой границе, т.е. границе, локально являющейся графиком функции, удовлетворяющей условию Липшица (см. И. Стейн, Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, Мир, 1973).

Приведем теперь перечень важнейших свойств пространств $H^s(\Omega)$.

1. Пространство $H^0(\Omega)$ совпадает с $L_2(\Omega)$. При $s' > s$ пространство $H^{s'}(\Omega)$ непрерывно и вполне непрерывно вложено в $H^s(\Omega)$. В случае $\mathbb{R}^n_+$ вместо Ω остается только утверждение о непрерывности вложения.

2. При $s > n/2$ пространство $H^s(\Omega)$ непрерывно вложено в пространство $C(\overline{\Omega})$, при $s > k+n/2$, где k – натуральное число, – в $C^k(\overline{\Omega})$. В случае $\mathbb{R}^n_+$ вместо Ω добавляются утверждения об ограниченности функций или ограниченности с производными до порядка k включительно.

3. При $s > 1/2$ функции из $H^s(\Omega)$ имеют граничные значения на границе Γ области Ω, принадлежащие $H^{s-1/2}(\Gamma)$, при этом оператор перехода к граничным значениям действует ограниченным образом в соответствующих соболевских пространствах. В случае $\mathbb{R}^n_+$ вместо Ω речь идет о граничных значениях на граничной гиперплоскости.

4. Все пространства $H^s(\Omega)$ являются гильбертовыми. Скалярные произведения, отвечающие нормам (1) и (2), легко выписываются. Пространство, сопряженное к $H^s(\Omega)$, можно поэтому отождествить с этим пространством. Аналогично обстоит дело в случае $\mathbb{R}^n_+$ вместо Ω.

5. Оператор умножения на функцию $a(x)$ из $C^k(\overline{\Omega})$ ограничен в $H^s(\Omega)$ при $0 \le s \le k$. В случае полупространства $\mathbb{R}^n_+$ то же верно, если $a(x)$ принадлежит $C^k_b(\mathbb{R}^n_+)$.

Соболевские пространства с отрицательными индексами в Ω в $\mathbb{R}^n_+$ тоже можно определить, но это нет смысла обсуждать наспех. Мы только наметим определение. Сначала при $s \ge 0$ вводится подпространство $H^s_0(\Omega)$ (в $H^s(\Omega)$) – пополнение пространства $C^\infty_0(\Omega)$ по норме в $H^s(\Omega)$. Это подпространство совпадает с $H^s(\Omega)$ при $s \le 1/2$ и не совпадает с ним при $s > 1/2$. Пространство $H^{-s}(\Omega)$ определяется как сопряженное к $H^s_0(\Omega)$ относительно формы $(u,v)_{0,\Omega}$ (точнее, ее продолжения). Аналогично обстоит дело в случае $\mathbb{R}^n_+$ вместо Ω. При $s = 1/2$ имеется другой разумный вариант определения, на этом не останавливаемся. См. Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, Неоднородные граничные задачи и их приложения, Мир, 1971.

Можно еще рассмотреть соболевские пространства на компактном гладком n-мерном многообразии M с ($(n-1)$-мерным) краем ∂M. Такое многообразие допускает конечное покрытие координатными окрестностями некоторых внутренних точек и "координатными полуокрестностями" некоторых точек

края. Соболевская норма неотрицательного порядка s на таком многообразии определяется при помощи разбиения единицы, подчиненного такому покрытию. При этом в координатных окрестностях после перехода к соответствующим локальным координатам используются нормы того же порядка в $\mathbb{R}^n$, а в координатных полуокрестностях – в $\mathbb{R}^n_+$. Ограниченная область с гладкой границей – частный случай. В общем случае свойства соболевского пространства $H^s(M)$ аналогичны. Удобно также рассматривать M как часть замкнутого многообразия M_0, тогда пространство $H^s(M)$ можно определить как состоящее из сужений на M функций из $H^s(M_0)$.

Другое обозначение для пространств H^s такое: W_2^s. Более общие пространства W_p^s в этих лекциях не затрагивались.

ПЛАН ЛЕКЦИЙ ПО ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРАМ В СЛЕДУЮЩЕМ СЕМЕСТРЕ

В прочитанных лекциях псевдодифференциальные операторы неоднократно упоминались, но подробно удалось расказать только об обобщенных функциях и соболевских пространствах. В следующем семестре псевдодифференциальные операторы будут изучаться систематически. Ниже приводится план.

ПДО (псевдодифференциальные операторы) в R^n класса $S^{1,0}$ и "классические" ПДО – обобщения дифференциальных операторов. Символ и главный символ. Исчисление ПДО. Эллиптичность, параметрикс эллиптического ПДО. Ограниченность в соболевских пространствах H^s. Переход от представления ПДО интегралами типа Фурье к их представлению интегралами типа свертки и описание ядер интегральных операторов, которые являются псевдодифференциальными операторами. ПДО нулевого порядка и сингулярные интегральные операторы.

ПДО на замкнутом многообразии. Эквивалентность эллиптичности и фредгольмовости в соболевских пространствах. Индекс эллиптического оператора, его гомотопическая инвариантность, аналитическая формула для индекса. Условия, достаточные для равенства индекса нулю. Эллиптичность с параметром и обратимость при больших значениях параметра. ПДО на окружности и торе: представление рядами типа Фурье.

Компактные ПДО и эллиптические ПДО с дискретным спектром. Спектральные свойства самосопряженных эллиптических ПДО ненулевого порядка на замкнутом многообразии; на окружности. Слабые возмущения самосопряженных эллиптических ПДО. ПДО, далекие от самосопряженных. Приложения к спектральным граничным задачам для классических уравнений математической физики. Функции от эллиптического ПДО A: степень A^s, экспоненты e^{-tA} и e^{itA}, ζ-функция, связи между ними.